Devoir Maison n° 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 novembre 2026

Une équation différentielle du premier ordre.

1. Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On a ensuite chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-x}$ (méthode de variation de la constante). On calcule $y_p'(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}$ et on constate que y_p est solution de (E) si $K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = xe^{-x}$, donc simplement si $K'(x) = x$. On peut donc choisir $K(x) = \dfrac{x^2}{2}$ pour obtenir comme expression de notre solution particulière $y_p(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{-x}$. Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2} + K\right)e^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. D'après la question précédente, il existe une constante K telle que $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + K\right)e^{-x}$, donc $f(0) = K$, et la condition donnée impose $K = -1$, soit $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)e^{-x}$.
3. La fonction f est évidemment définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par croissance comparée, on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Le signe de f est évidemment le même que celui de $\dfrac{x^2}{2} - 1$, il est donc positif quand $x^2 \geqslant 2$, donc sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, +\infty[$. De plus, $f'(x) = xe^{-x} - \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)e^{-x}$ est du signe de $-\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 2 = 3$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{-1} = 1 - \sqrt{3}$, et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. On constate que, par définition, les racines de l'équation vérifient $\dfrac{1}{2}x_1^2 - 1 = x_1$ et $\dfrac{1}{2}x_2^2 - 1 = x_2$, ce qui permet d'obtenir facilement $f(1-\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \simeq -1.5$ et $f(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \simeq 0.2$ (pas d'autre choix que de recourir à une horrible calculatrice pour obtenir ces valeurs approchées). Pour les courageux, on enchaîne avec le calcul de $f''(x) = (-x+1)e^{-x} - \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1\right)e^{-x} = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^{-x}$. Cette dérivée seconde s'annule en 0 et en 4, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $[4, +\infty[$ et concave sur $[0, 4]$. Contentons-nous d'un tableau de variations classique pour terminer cette étude :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↘	$\simeq -1.5$	↗	0	↗	$\simeq 0.2$	↘	0

Et bien sûr la superbe courbe qui va avec (les points d'annulation sont en rouge, et j'ai indiqué les tangentes aux points d'inflexion en orange même si je n'ai pas fait tous les calculs dans ce corrigé) :

