

Devoir Maison n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 novembre 2026

Filtres et ultrafiltres.

Pour ce DM de vacances, vous aurez droit cette fois-ci à un « vrai » problème un peu consistant. Il s'agit de théorie des ensembles, donc c'est assez formel, mais beaucoup de questions restent très accessibles, prenez le temps de bien comprendre ce qui est demandé et vous devriez arriver à traiter une majorité du devoir sans aide.

A. Définition et exemples.

Soit E un ensemble quelconque, et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(E)$ (les **éléments** de $\mathcal{F}$ sont donc des **sous-ensembles** de E). On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathcal{F}$ est stable par intersection : si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$
 - $\mathcal{F}$ est stable par « inclusion supérieure » : si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$
 - l'ensemble vide n'appartient pas à $\mathcal{F}$
1. Si $E = \{1, 2, 3\}$, quels sont les filtres parmi les propositions suivantes (on justifiera les réponses) : $\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\mathcal{F}_3 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$?
 2. À quoi serait nécessairement égal $\mathcal{F}$ s'il contenait l'ensemble vide (en conservant les deux autres propriétés de la définition) ?
 3. L'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ peut-il être un filtre sur E ?
 4. Dans l'ensemble $E = \mathbb{N}$, montrer que les sous-ensembles dont le complémentaire est fini forment un filtre.
 5. Toujours dans l'ensemble $E = \mathbb{N}$, montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ constitué de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ contenant l'entier 42 forme un filtre.
 6. Plus généralement, montrer que, si $A \subset \mathbb{N}$ est fixé, l'ensemble $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subset B\}$ est un filtre. On dit que $\mathcal{F}_A$ est le **filtre principal** engendré par le sous-ensemble A (et on étend cette notion à n'importe quel ensemble E).
 7. Le filtre de la question 3 est-il un filtre principal (autrement dit, existe-t-il un sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}$ pour lequel ce filtre est égal à $\mathcal{F}_A$) ?
 8. Montrer que, si $A \neq B$, alors $\mathcal{F}_A \neq \mathcal{F}_B$. En déduire un minorant du nombre de filtres existant sur l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, n\}$.
 9. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble quelconque E dont l'un des éléments est un sous-ensemble fini de E . En notant $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists B \in \mathcal{F}, |B| = n\}$, montrer que $\mathcal{F}$ est un filtre principal engendré par un sous-ensemble A de cardinal n_0 (dans la définition précédente, $|B|$ désigne le cardinal de B , c'est-à-dire son nombre d'éléments).
 10. En déduire que, dans un ensemble fini, tous les filtres sont principaux, puis donner le nombre exact de filtres existant sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

Une relation d'ordre sur les filtres.

On s'intéresse désormais à la relation d'ordre définie sur l'ensemble des filtres sur un ensemble E par le symbole d'inclusion. Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur E , on notera $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ (avec égalité autorisée). On dira par ailleurs que $\mathcal{F}$ est un **ultrafiltre** sur E si $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_3$ défini à la toute première question de ce problème est un ultrafiltre sur $\{1, 2, 3\}$.
2. L'ensemble de tous les filtres sur E possède-t-il un maximum pour la relation $\leq$? Et un minimum?
3. Montrer qu'un filtre principal $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si le sous-ensemble A ne contient qu'un seul élément de E (on pourra commencer par prouver que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$).
4. Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si, pour tout sous-ensemble $B \subset E$, on a $B \in \mathcal{F}$ ou $\overline{B} \in \mathcal{F}$.
5. Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si, quels que soient les sous-ensembles B et C de E , on a $B \cup C \in \mathcal{F} \Rightarrow (B \in \mathcal{F} \text{ ou } C \in \mathcal{F})$.
6. Montrer que, dans $E = \mathbb{N}$, le filtre constitué des sous-ensembles de complémentaire fini n'est pas un ultrafiltre, et qu'il n'est inclus dans aucun ultrafiltre principal.