

Devoir Maison n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 octobre 2026

Diverses questions de trigonométrie.

1. On va bien sûr appliquer deux fois de suite la formule de duplication de la tangente vue en cours :

$$\begin{aligned}\tan((a+b)+c) &= \frac{\tan(a+b) + \tan(c)}{1 - \tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{(\tan(a)+\tan(b))\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)}} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(a)\tan(c) - \tan(b)\tan(c)}.\end{aligned}$$

On notera la belle symétrie de la formule obtenue (une permutation des variables a , b et c ne change rien au résultat, ce qui est évidemment normal).

Appliquons la formule précédente à $a = \arctan(2)$, $b = \arctan(3)$ et $c = \arctan(2 + \sqrt{3})$, de façon à avoir $\tan(a) = 2$, $\tan(b) = 3$ et $\tan(c) = 2 + \sqrt{3}$. On en déduit que $\tan(\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3})) = \frac{2 + 3 + 2 + \sqrt{3} - 12 - 6\sqrt{3}}{1 - 6 - 4 - 2\sqrt{3} - 6 - 3\sqrt{3}} = \frac{-5 - 5\sqrt{3}}{-15 - 5\sqrt{3}} = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}(5 + 5\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Autrement dit, le nombre qu'on cherche à calculer a la même tangente que l'angle remarquable $\frac{\pi}{6}$. Peut-on en déduire pour autant que $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$? Sûrement pas, on peut seulement dire que les deux angles sont congrus modulo π (puisque la fonction tangente est π -périodique et bijective sur chacune de ses périodes). Or, $2 > 1$, et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(2) \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$. Exactement pour les mêmes raisons, on a aussi $\arctan(3) \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $\arctan(2 + \sqrt{3}) \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$. La somme des trois nombres appartient donc à l'intervalle $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$, dans lequel le seul réel congru à $\frac{\pi}{6}$ modulo π est $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Il est temps de conclure : $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{7\pi}{6}$.

2. Utiliser directement des formules de duplication ou de triplification ne semble aboutir à rien, donc on se résout à tenter une formule de transformation somme-produit pour le membre de gauche : $\cos(x) - \cos(2x) = 2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Il est temps de s'occuper du membre de droite et de penser à l'astuce consistant, non pas à exploiter naturelle une formule de triplification, mais bien à utiliser celle de duplication pour écrire $\sin(3x) = \sin\left(2 \times \frac{3}{2}x\right) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$. Grâce au sinus commun entre les deux membres, il est désormais facile de résoudre l'équation : soit on a $\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0$, donc $\frac{3}{2}x \equiv 0[\pi]$, ou encore $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right]$; soit $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$, ce qu'on peut écrire sous la forme $\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$, d'où découlent les deux possibilités $\frac{\pi - x}{2} \equiv \frac{3x}{2}[2\pi]$, donc $x \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$, ou $\frac{x - \pi}{2} \equiv \frac{3x}{2}[2\pi]$, donc $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Il y a donc un paquet de solutions. Par exemple sur $[-\pi, \pi]$, toutes les valeurs suivantes sont solutions : $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$.
3. La fonction f a le même domaine de définition que la fonction tangente. De plus, elle est π -périodique, donc on peut déjà restreindre son domaine d'étude à la période $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En fait, la fonction étant claire impaire, on peut même se restreindre à la demi-période $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction f

est dérivable sur cet intervalle, et $f'(x) = 2\cos(2x) - \frac{3}{4\cos^2(x)} = 2(2\cos^2(x) - 1) - \frac{3}{4\cos^2(x)} = \frac{16\cos^4(x) - 8\cos^2(x) - 3}{4\cos^2(x)}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, pour lequel on va poser brillamment $X = \cos^2(x)$ pour se ramener au trinôme $16X^2 - 8X - 3$. Le discriminant associé est $\Delta = 64 + 192 = 256 = 16^2$, et il y a donc deux racines réelles $X_1 = \frac{8-16}{32} = -\frac{1}{4}$ et $X_2 = \frac{8+16}{32} = \frac{3}{4}$. On élimine évidemment la valeur négative, et on obtient comme seule possibilité d'annulation de notre dérivée $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$, donc $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Puisqu'on a eu la bonne idée de se placer sur l'intervalle d'étude $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, notre dérivée s'annule uniquement pour $x = \frac{\pi}{6}$. On calcule donc $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{4} \times \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. On peut ajouter le fait que $f(0) = 0$, et bien sûr calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$ pour obtenir le tableau de variations suivant sur une période complète (on obtient bien sûr la deuxième moitié par imparité de f) :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
f	$+\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\infty$

Ce n'était pas explicitement demandé, mais voici à quoi ressemble la courbe de f :

