

Devoir Maison n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

23 septembre 2026

Applications et relations.

1. Dans les deux cas, la réponse est positive. Pour les 42 antécédents pour chaque entier, il suffit de poser $f(n) = \text{Ent}\left(\frac{n}{42}\right)$. Pour tout entier naturel p , les entiers $42p$, $42p + 1$, et ainsi de suite jusqu'à $42p + 41$ seront des antécédents de p , et il y en a bien exactement 42 pour chaque valeur de p .

On ne peut évidemment pas procéder de la même façon pour obtenir une infinité d'antécédents pour chaque entier, mais on peut pourtant, à défaut de formule, donner une description assez simple d'une fonction faisant l'affaire : pour tout entier $n \geq 2$, on décompose n en produit de facteurs premiers et on note $f(n)$ la valeur du plus grand exposant apparaissant dans cette décomposition. Par exemple, $f(60) = f(2^2 \times 3 \times 5) = 2$, $f(36) = f(2^2 \times 3^2) = 2$ aussi, mais $f(1\,000) = f(2^3 \times 5^3) = 3$. Bien sûr, tout nombre premier, ou produit de nombre premiers distincts, aura une image égale à 1. L'entier 1 a donc une grosse infinité d'antécédents (les nombres premiers suffiraient pour cela), mais 2 aussi puisque $f(p^2) = 2$ pour tout entier p premier, 3 aussi puisque $f(p^3) = 3$ quand p est premier. Plus généralement, l'entier k aura toujours comme antécédents tous les nombres de la forme p^k avec p premier (et plein d'autres, accessoirement), ce qui lui assure une infinité d'antécédents. Le seul entier à ne pas avoir d'antécédent serait 0, mais il suffit de prendre $g(n) = f(n) - 1$ pour régler ce petit problème (accessoirement, on impose des valeurs aléatoires pour $g(0)$ et $g(1)$ histoire que g soit définie sur $\mathbb{N}$ tout entier).

2. La relation est clairement symétrique, et elle est aussi réflexive : si $p \in \mathcal{P}$, $\frac{p+p}{2} = p$ reste évidemment premier. Par contre, elle n'est pas du tout transitive. Par exemple, $7\mathcal{R}19$ puisque leur moyenne est égale à 13, et $19\mathcal{R}43$ puisque leur moyenne est égale à 31 qui est premier, mais $\frac{7+43}{2} = 25$ n'est pas vraiment un nombre premier.
3. (a) La relation est réflexive puisque $x = x^1$. Elle est antisymétrique : si $y = x^n$ et en même temps $x = y^p$ (pour un entier naturel p éventuellement différent de n), alors $y = (y^p)^n = y^{np}$. Cette égalité ne peut être vraie que si $np = 1$ ou si $y = 1$. Le cas $y = 1$ impose $x = 1^p = 1$ donc $x = y$, et le cas $np = 1$ avec n et p tous les deux entiers ne peut se produire que si $n = p = 1$, donc à nouveau $x = y$. Enfin, la relation est facilement transitive : si $y = x^n$ et $z = y^p$, alors $z = x^{np}$, avec bien sûr $np \in \mathbb{N}$. Ce n'est par contre pas du tout une relation d'ordre total puisqu'on ne peut par exemple pas comparer 2 et 3 à l'aide de $\mathcal{R}$.
- (b) Le sous-ensemble $A = \{2, 4, 16, 256\}$ a pour minimum 2 (les autres nombres de l'ensemble étant respectivement égaux à 2^2 , 2^4 et 2^8), et pour maximum 256 puisque $256 = 2^8 = 4^4 = 16^2$. On pouvait même tricher un peu et simplifier les choses en remplaçant 256 par 1 (en effet, 1 est « plus grand » que tous les autres entiers pour cette relation dans la mesure où on autorise $n = 0$ dans la définition de $\mathcal{R}$, et $x^0 = 1$ pour tout entier naturel x).

L'ensemble $B = \{4, 8, 16, 32\}$ admet 2 comme borne inférieure : tous ses éléments sont des puissances entières de 2 donc 2 minore B . Et comme 4 n'est une puissance de rien d'autre que 2 et 4 et qu'il y a des éléments de B qui ne sont pas des puissances de 4 (par exemple 8), 2 est en fait le seul minorant de B , donc évidemment sa borne inférieure. La borne supérieure de B est nettement moins sympathique puisqu'elle vaut 2^{60} . En effet, un entier majorant B est nécessairement une puissance de 4, donc une puissance de 2. On cherche donc la puissance de 2 la plus petite possible qui soit à la fois puissance de 4, de 8, de 16 et de 32. Or, si on pose $M = 2^k$, M est une puissance de 4 si et seulement si k est pair, une puissance de 8 si et seulement si k est multiple de 3, et ainsi de suite. M est donc un majorant de B si et seulement si k est un multiple commun de 2, 3, 4 et 5. Le ppcm de ces quatre entiers étant égal à 60, la

plus petite valeur de k correspondante est donc 60, et 2^{60} est le plus petit majorant de B (au sens de $\mathcal{R}$, puisque 1 est aussi majorant, mais c'est paradoxalement le plus grand). Cette fois, par contre, B a une infinité de majorants, ce qui est d'ailleurs le cas de tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ pour cette relation.