

Aide au calcul, séance 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

25 septembre 2026

Exercice 1 : équations et inéquations.

- Pour que le membre de droite ait un sens, on doit avoir $x \leq 1$, on va donc résoudre sur l'intervalle $] -\infty, 1]$. Il faut également enlever la valeur $x = -1$, qui est une valeur interdite pour le membre de gauche. Par ailleurs, si $x < -1$, ce même membre de gauche est strictement négatif, et l'inégalité est alors nécessairement vérifiée, l'intervalle $] -\infty, -1[$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de notre inéquation. Si $x \in] -1, 1]$, tout est positif à gauche comme à droite, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $\frac{1}{x^2 + 2x + 1} \leq 1 - x$, soit $1 \leq (x^2 + 2x + 1)(1 - x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, ce qui donne donc $x^3 + x^2 - x \leq 0$. Le membre de gauche se factorise sous la forme $x(x^2 + x - 1)$, et la parenthèse a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et s'annule en $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x^3 + x^2 - x$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$+$

Dans l'intervalle qui nous concerne, on garde comme solutions les nombres dans l'intervalle $\left[0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$. Finalement, $\mathcal{S} =] -\infty, -1[\cup \left[0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

- Bien sûr, on passe tout à gauche et on met au même dénominateur : $\frac{(2x + 3)(2x - 3) - 4x(x - 1)}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$, soit en développant le numérateur (on ne touche pas au dénominateur, ça n'aurait aucun intérêt) $\frac{4x - 9}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$. Il ne reste plus qu'à faire un beau tableau de signes :

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
$4x - 9$	$-$	$-$	$\emptyset$
$x - 1$	$-$	$\emptyset$	$+$
$2x - 3$	$-$	$-$	$\emptyset$
Q	$-$	$+$	$-$

On conclut : $\mathcal{S} =] -\infty, 1[\cup \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$.

- Il nous faudrait une racine évidente. Ne nous laissons pas impressionner par les coefficients, $x = 2$ convient très bien, puisque $2^3 - 39 \times 2 + 70 = 8 - 78 + 70 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de notre équation sous la forme $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$. Par identification des coefficients, on trouve successivement les conditions $a = 1$, puis $b - 2a = 0$ (attention, il n'y a pas de terme en x^2 dans le polynôme initial !) donc $b = 2$; $c - 2b = -39$, donc $c = -35$, ce qui est cohérent avec la dernière équation

$-2c = 70$. Notre deuxième facteur $x^2 + 2x - 35$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 140 = 144$ (oh tiens, un carré parfait), et admet pour racines $x_1 = \frac{-2-12}{2} = -7$ et $x_2 = \frac{-2+12}{2} = 5$. Bref, on conclut aisément : $\mathcal{S} = \{-7, 2, 5\}$.

4. Le membre de gauche a un sens si $x \neq -1$ et $x \neq 2$ (seules valeurs pour lesquelles les valeurs absolues dans les ln ne sont pas **strictement** positives toutes les deux). Le reste du temps, on peut simplement écrire que l'inéquation est équivalente à $\ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| \leq \ln(2)$, soit en passant à l'exponentielle $\left| \frac{x+1}{x-2} \right| \leq 2$. On se débarrasse des valeurs absolues : $-2 \leq \frac{x+1}{x-2} \leq 2$, puis on traite séparément les deux conditions : l'inéquation de gauche peut s'écrire $0 \leq \frac{x+1}{x-2} + 2 = \frac{3x-3}{x-2}$. Le quotient $\frac{3x-3}{x-2}$ est du même signe que le produit $(3x-3)(x-2)$, donc positif à l'extérieur de ses racines, sur les deux intervalles $] -\infty, 1]$ (auquel il faudra éventuellement enlever la valeur interdite -1) et $]2, +\infty[$ (là on enlève tout de suite la valeur interdite 2). L'autre inéquation s'écrit $\frac{x+1}{x-2} - 2 \leq 0$, soit $\frac{-x+5}{x-2} \leq 0$. Même raisonnement qu'auparavant, le quotient est du signe du produit, donc négatif à l'extérieur des racines (il y a un coefficient négatif devant x^2 ici), soit sur les intervalles $] -\infty, 2[$ et $[5, +\infty[$. Pour que les deux conditions soient vérifiées simultanément, on conserve $\mathcal{S} =] -\infty, 1] \setminus \{-1\} \cup [5, +\infty[$.
5. On va bien sûr commencer par poser $X = \ln(x)$ pour se ramer à l'inéquation du troisième degré $2X^3 - 5X^2 + 2X \leq 0$, qu'on peut bien sûr factoriser par X pour obtenir $X(2X^2 - 5X + 2) \leq 0$. Le trinôme $2X^2 - 5X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, et admet pour racines $X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{5+3}{4} = 2$. Autrement dit, on doit étudier le signe du trinôme $X(X-2)(2X-1)$, qui est donné par le tableau suivant :

X	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2X^3 - 5X^2 + 2X$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-

On en déduit que x est solution de notre inéquation si $X \in]-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, soit en remontant le changement de variable $\mathcal{S} =]0, 1] \cup [\sqrt{e}, e^2]$.

6. Pour que l'inéquation puisse avoir un sens, l'expression sous la racine doit être positive. Or, elle a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et s'annule donc pour $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$. On peut donc chercher à résoudre l'inéquation sur le domaine $] -\infty, 1] \cup [4, +\infty[$. Si on se place sur un des intervalles $[4, +\infty[$ ou $[-3, 1]$, $x+3 \geq 0$ donc $|x+3| = x+3$ et on peut tout élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $x^2 - 5x + 4 \geq x^2 + 6x + 9$, soit $-5 \geq 11x$ et donc $x \leq -\frac{5}{11}$. On conserve donc l'intervalle $\left[-3, -\frac{5}{11}\right]$ dans notre ensemble de solutions. Sur l'intervalle $] -\infty, -3]$, on a désormais $x+3 \leq 0$, donc $|x+3| = -x-3$. Mais en fait, ça ne change strictement rien à l'inéquation qu'on va résoudre en élevant les deux membres au carré (ce qu'on peut faire de toute façon puisqu'ils sont tous les deux positifs). On trouve donc à nouveau $x \leq -\frac{5}{11}$, condition qui est toujours vérifiée quand $x \in]-\infty, -3]$, et on conclut : $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{5}{11}\right]$.
7. Par rapport à la question précédente, le seul cas où quelque chose change est celui où $x+3 \leq 0$, puisque dans ce cas le membre de droite de l'inéquation devient négatif. Mais s'il est négatif, l'inéquation est trivialement vérifiée sur tout l'intervalle $] -\infty, -3]$ et on a donc toujours $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{5}{11}\right]$.

8. Il faut distinguer trois cas (et théoriquement faire un joli tableau, mais ici les valeurs sont suffisamment simples pour que ce ne soit pas vraiment nécessaire) :

- si $x \geq 1$, $|x| - |x - 1| = x - (x - 1) = 1$, donc $||x| - |x - 1|| = |1| = 1$ et l'équation est toujours vérifiée.
- si $x \in [0, 1]$, $|x| - |x - 1| = x - (1 - x) = 2x - 1$, expression positive sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'équation devient donc $2x - 1 = 1$ qui a pour unique solution 1 (déjà obtenue sur l'intervalle précédent), et sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on retrouve $1 - 2x = 1$ qui a pour unique solution 0.
- sur $\mathbb{R}^-$, $|x| - |x - 1| = -x - (1 - x) = -1$ qui a toujours une valeur absolue égale à 1, donc tout le monde est solution.

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

9. On va bien sûr procéder ici à un classique « tableau de signes » :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$ x $		$-x$	$-x$	x	x
$ x - 1 $		$1 - x$	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 1 $		$-1 - x$	$1 + x$	$1 + x$	$1 + x$
$ x + x - 1 + x + 1 $	$-3x$	$2 - x$	$2 + x$	$3x$	

On résout maintenant sur chacun des quatre intervalles :

- Sur $] -\infty, -1]$, $-3x \leq 6$ quand $x \geq -2$, donc on conserve $[-2, -1]$.
- Sur $[-1, 0]$, $2 - x \leq 6$ quand $x \geq -4$, ce qui est toujours vrai.
- Sur $[0, 1]$, $2 + x \leq 6$ quand $x \leq 4$, ce qui est à nouveau toujours vrai.
- Sur $[2, +\infty[$, $3x \leq 6$ si $x \leq 2$, on conserve donc $[1, 2]$.

En regroupant les quatre intervalles, on trouve $\mathcal{S} = [-2, 2]$. Ici, un argument de parité aurait pu permettre de ne faire le calcul que sur deux des quatre intervalles.

10. On distingue simplement deux cas en fonction du signe de x . Si x est positif, on résout $x^2 - 4x + 3 > 0$, donc le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$ et les racines $x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, donc $\mathcal{S}_1 = [0, 1[\cup]3, +\infty[$. Si on est paresseux, on ne résout rien côté négatif puisque la fonction $x \mapsto x^2 - 4|x| + 3$ est paire et sera donc également strictement positive sur les intervalles symétriques $] -\infty, -3[\cup]-1, 0]$. Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[$.

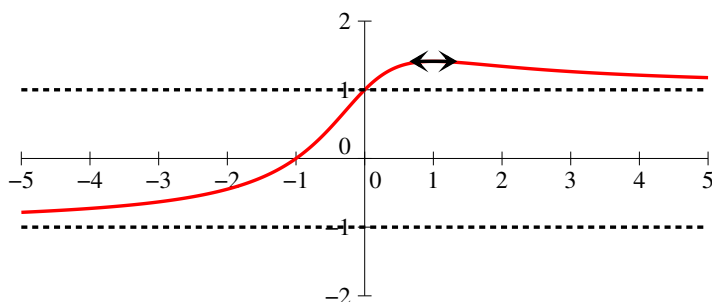
Exercice 2 : études de fonctions.

- La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a toujours $x^2 + 1 > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'_1(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x(x + 1)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, où la fonction f_1 admet un maximum de valeur $f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pour le calcul des limites, on procède comme souvent en factorisant numérateur et dénominateur, mais attention, il y a un petit piège : $f_1(x) = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}$. Attention au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Si $x > 0$, on trouve donc $f_1(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$, mais si $x < 0$, $f_1(x) = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

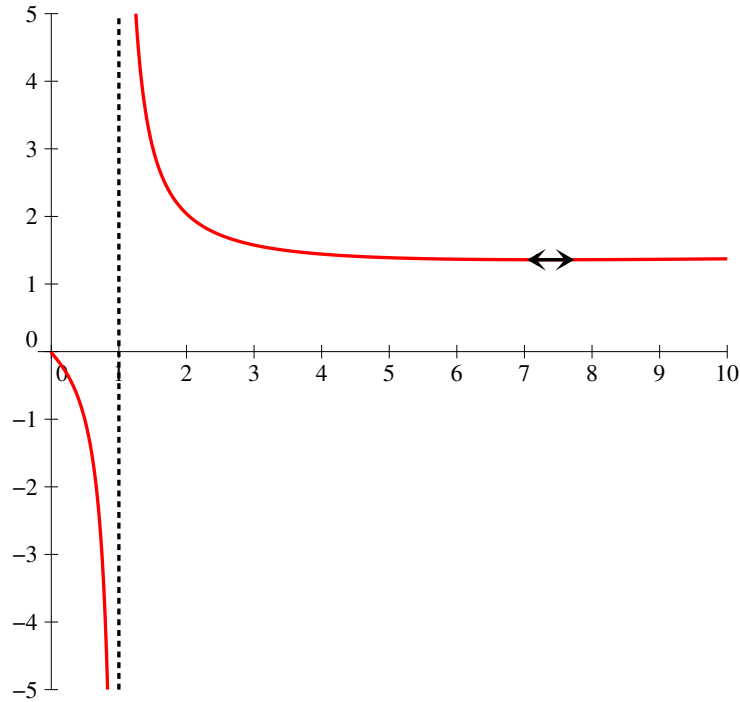
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f_1		$\sqrt{2}$	1
	-1		

Si on veut être plus précis, on peut noter que $f_1(0) = 1$, et que f_1 est du signe de $x + 1$, donc positive sur $[-1, +\infty[$. On conclut avec une première courbe :

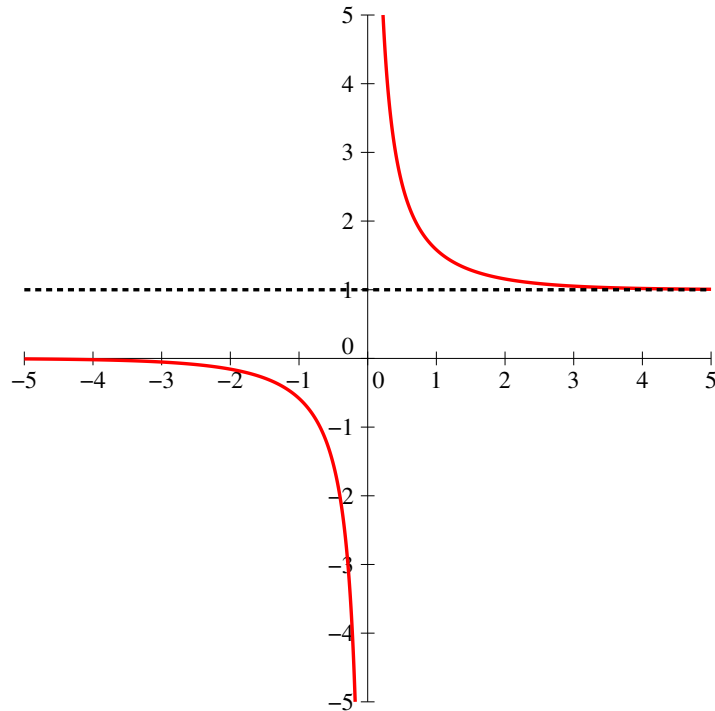


- La fonction f_2 est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (attention à la valeur d'annulation du logarithme!), elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_2'(x) = \frac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x} \ln^2(x)}$. Notre fonction est donc décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, e^2[$, admet un maximum de valeur $f_2(e^2) = \frac{e}{2}$, et est décroissante sur $]e^2, +\infty[$. On obtient sans difficulté $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = +\infty$, et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ par croissance comparée (pour les plus curieux, il n'y a pas d'asymptote oblique). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0	1	e^2	$+\infty$
f_2	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
			$\frac{e}{2}$	

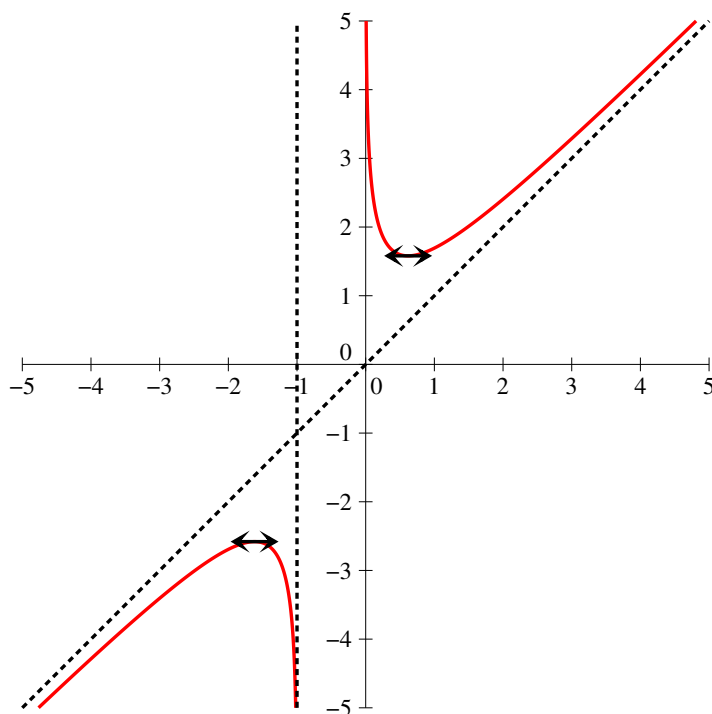


- La fonction f_3 est définie si $e^x \neq 1$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Elle y est dérivable, de dérivée $f'_3(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$, donc elle est décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On obtient immédiatement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ nécessite un petit calcul, on peut par exemple diviser numérateur et dénominateur par e^x pour écrire $f_3(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$, et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = 1$. Je ne me fatigue pas à faire un tableau de variations, voici la courbe :

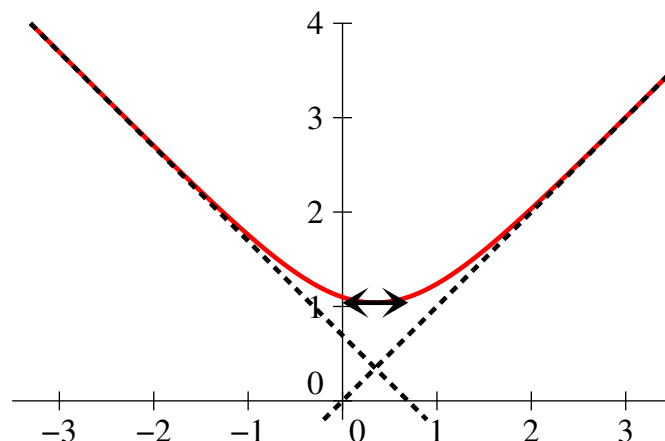


- La fonction f_4 est définie si $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$. Cela se produit sur $] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (pas

besoin de tableau de signe, j'espère!). Elle y est dérivable, de dérivée $f'_4(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + 1 = 1 - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur $\mathcal{D}_{f_4}$, et son numérateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, il s'annule pour $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (qui appartiennent tous les deux à notre domaine de définition). Les valeurs prises par la fonction aux deux extrema locaux n'ont vraiment aucun intérêt et sont particulièrement ignobles. Par contre, on peut constater que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, ce qui prouve directement que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f_4 en $+\infty$ et en $-\infty$ (et accessoirement donne donc les limites de la fonction à l'infini). On calcule par ailleurs sans difficulté $\lim_{x \rightarrow -1} f_4(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x) = +\infty$, ce qui donne une courbe d'allure suivante :



- La fonction f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve dans le $\ln$ est toujours strictement positif), de dérivée $f'_5(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. La dérivée est du signe de son numérateur, donc de $e^{2x} - 2$ (quitte à factoriser par e^{-x}). Or, $e^{2x} \geq 2$ si $x \geq \frac{\ln(2)}{2}$. On peut calculer $f_5\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln(2)$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_5(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Avant de tracer la courbe, on peut s'intéresser aux asymptotes de f_5 : du côté de $+\infty$, on peut écrire $f_5(x) = \ln(e^x(1 + 2e^{-2x})) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$, avec le deuxième morceau qui a une limite nulle en $+\infty$. Cela suffit à prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f_5 en $+\infty$. De même, la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote en $-\infty$.



- La fonction f_6 est définie si $x > 0$ et $x > \ln(x)$, ce qui est toujours le cas (par exemple à l'aide de l'inégalité de convexité classique $\ln(x) \leq x - 1$ qu'on va bientôt signaler en cours), donc $\mathcal{D}_{f_6} =]0, +\infty[$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f_6(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée de ce côté). La fonction f_6 est par ailleurs dérivable et $f'_6(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln(x)} = \frac{x - 1}{x(x - \ln(x))}$. Le dénominateur de cette dérivée étant strictement positif, elle est du signe de $x - 1$. La fonction est donc décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$, avec pour minimum $f_6(1) = \ln(1 - 0) = 0$.

