Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 11 : Matrices

MPSI Lycée Camille Jullian

8 janvier 2026

Exercice 1 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 2 (* à **)

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec chacune des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; I_n ; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique (très peu de calculs nécessaires).

Exercice 4 (*)

Montrer que $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (**)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$, et en déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 6 (**)

On fixe A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$, où X est une matrice inconnue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (***)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant la matrice A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse (sans faire le pivot de Gauss).
3. En utilisant les racines du polynôme trouvé à la question 1, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par ce polynôme, pour un entier $n \geqslant 2$.
4. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 8 (***)

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^2 puis déterminer les puissances de matrice J. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (**)

Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (au moins deux méthodes possibles).

Exercice 10 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 11 (*)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 13 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (matrice carrée à n lignes et n colonnes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (on peut perdre énormément de temps à appliquer un pivot bête et (très) méchant, on peut aussi chercher des astuces diaboliques à bases de racines sixièmes de l'unité) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (**)

Pour tout réel a, on note $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$, et $G = \{M_a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

1. En posant $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que les matrices appartenant à G sont combinaisons linéaires des matrices I_3, U et U^2.
2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & G \\ a & \mapsto & M_a \end{array} \right.$ est bijective.
3. Calculer $M_a M_b$. Que constate-t-on ? Les matrices M_a sont-elles toujours inversibles (si oui, donner leur inverse) ?

4. En déduire que G est un sous-groupe multiplicatif de $GL_3(\mathbb{R})$.
5. Calculer M_a^n pour tout entier relatif n.

Exercice 17 (**)

On définit dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer l'inverse de la matrice P (méthode au choix).
2. Calculer le produit $P^{-1}AP$ (on doit obtenir une matrice diagonale).
   On notera pour la suite $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression explicite de A^n.
4. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 5x - 3y - z = 5 \\ 4x - 3y - 2z = -2 \\ -2x + 3y + 4z = 16 \end{cases}$.
   Que peut-on en déduire concernant la matrice $A + I$?
5. Calculer A^2 et A^3 et déterminer une relation entre les matrices A^2, A et I_3 (la matrice A^3 ne sert pas pour cette partie de la question).
6. Déduire du résultat de la question précédente si la matrice A est inversible, et si oui, donner explicitement son inverse.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$.
8. Calculer a_n et b_n, et retrouver la valeur de A^n obtenue à la question 3 (il est bien sûr interdit d'utiliser cette même question 3 pour répondre à celle-ci).
9. La formule obtenue pour A^n reste-t-elle valable lorsque $n = -1$?
10. La formule obtenue pour A^n reste-t-elle valable lorsque $n = -2$?
11. On souhaite désormais calculer le **commutant** de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices M vérifiant $AM = MA$.
    (a) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice D obtenue à la question 2.
    (b) Montrer que, en posant $N = P^{-1}MP$, M commute avec A si et seulement si N commute avec D.
    (c) En déduire les matrices commutant avec A (on essaiera de les exprimer comme combinaisons linéaires de certaines matrices fixées, quelque chose du genre $M = aM_1 + bM_2 + \dots$, avec $(a, b, \dots)$ variant dans $\mathbb{R}$).

Exercice 18 (***)

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les matrices carrées $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MM^\top M = I_n$ (on notera (E) cette équation).

1. Justifier que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que, si A est une matrice symétrique et inversible, A^{-1} est également symétrique.
3. Exprimer $\mathrm{Tr}(A^\top A)$ en fonction des coefficients de la matrice A. En déduire que, si A est symétrique, $\mathrm{Tr}(A^2) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$.
4. Soit A une matrice carrée telle qu'il existe deux matrices B et C de même taille telles que $AB = CA = I_n$ (autrement dit, A admet un inverse à gauche et un inverse à droite). En calculant $A(B - C)A$, montrer que A est inversible.
5. Montrer que toute solution M de l'équation (E) est une matrice inversible, puis symétrique, et en déduire la valeur de M^3.

6. En notant $a = \text{Tr}(M)$ et $b = \text{Tr}(M^2)$, exprimer en fonction de a et de b les valeurs de $\text{Tr}((M - I_n)^2)$, de $\text{Tr}((M^2 - I_n)^2)$ et enfin de $\text{Tr}((M - M^2)^2)$ (en supposant toujours M solution de (E)).
7. En déduire que la seule solution de l'équation (E) est $M = I_n$.

Exercice 19 (**)

On considère dans tout cet exercice les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer explicitement les matrices A^2 et A^3.
2. Déterminer trois entiers a, b et c tels que $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$ (on écrira explicitement la résolution du système nécessaire au calcul de ces coefficients).
3. Déterminer à l'aide de la question précédente si la matrice A est inversible, et le cas échéant, donner son inverse A^{-1}.
4. En notant Q le polynôme annulateur de A (donc $Q = X^3 - aX^2 - bX - c$), déterminer les racines du polynôme Q.
5. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Calculer $P^{-1}AP$, matrice que l'on notera D par la suite (D doit être une matrice diagonale). Quel lien peut-on faire avec le polynôme Q de la question 4 ?
7. Donner l'expression de D^n, puis montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer explicitement A^n).
8. On définit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par les conditions suivantes : $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n - v_n - 3w_n$, $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $w_{n+1} = 2u_n + v_n + 2w_n$. On notera de plus $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Établir une relation entre X_{n+1} et X_n faisant intervenir la matrice A.
   (b) En déduire une relation entre X_n et X_0 qu'on démontrera rigoureusement.
   (c) Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Problème (***)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si tous ses coefficients sont positifs et si, $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. On considèrera dans ce problème qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** vers la matrice A si chacun des coefficients $(A_p)_{i,j}$ a pour limite $A_{i,j}$ quand n tend vers $+\infty$.

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère dans cette première partie la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = a_nA + b_nI$.
3. Déterminer des relations de récurrence sur les suites (a_n) et (b_n), et en déduire les valeurs de a_n et b_n, puis la matrice A^n.
4. Montrer que la suite de matrices (A^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette deuxième partie, on pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les puissances de la matrice J.
2. Écrire B comme combinaison des matrices I_3 et J, et en déduire les puissances de la matrice B à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que la suite (B^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère désormais une matrice stochastique $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in [0,1]^2$.

1. Calculer A^p dans le cas où $a = b = 1$, et $a = b = 0$. On exclut ces deux cas particuliers pour les questions suivantes.
2. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-a-b+1)$, calculer $P(A)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire les puissances de la matrice A.
5. Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite à préciser.

IV. Une étude plus générale.

On considère désormais une matrice stochastique (à n lignes et n colonnes) dont tous les coefficients sont strictement positifs. On note m le plus petit coefficient de A ; $\alpha_j^{(p)}$ le plus petit coefficient de la colonne numéro j de la matrice A^p, et $\beta_j^{(p)}$ le plus grand coefficient de cette même colonne. Enfin, on note $\delta_j^{(p)} = \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)}$.

1. Montrer que si la suite (A^p) converge, sa limite B est une matrice stochastique, et vérifie $B^2 = B$ et $BA = AB$.
2. Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1; \dots; n\}$, $\alpha_j^{(p)} \leqslant \alpha_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$, et $\delta_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m)\delta_j^{(p)}$.
3. En déduire que la suite (A^p) converge. Que peut-on dire des lignes de la matrice limite B ?
4. Déterminer la limite de la suite (A^p) lorsque $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (on pourra exploiter le fait que A est une matrice symétrique).