Feuille d'exercices n° 24 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

18 mai 2026

Exercice 1 (**)

1. On décompose simplement en produit de cycles : $\sigma = (1\ \ 3)(2\ \ 6)(5\ \ 8\ \ 7)$. On a un produit de deux transpositions impaires et d'un 3-cycle pair, donc σ est paire.
2. Même méthode : $\sigma = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 9\ \ 10\ \ 4\ \ 7\ \ 5\ \ 8\ \ 6)$. En fait, σ est un cycle de longueur 10, donc une permutation impaire.
3. Si n est pair, σ est le produit des transpositions $(i\ \ n-i)$ pour i variant entre 0 et $\dfrac{n}{2}$. La permutation est donc paire si n est divisible par 4, impaire si $n \equiv 2[4]$. Si n est impair, σ est toujours le produit des transpositions $(i\ \ n-i)$, mais avec i variant entre 1 et $\dfrac{n}{2}-1$, la permutation admettant dans ce cas $\dfrac{n}{2}$ comme unique point fixe. La permutation est donc paire si $n \equiv 1[4]$ (puisque $\dfrac{n-1}{2}$ sera alors un entier pair), et impaire si $n \equiv 3[4]$.
4. On peut ici compter directement le nombre d'inversions de la permutation σ : un couple (i,j) ne peut être « en inversion » que si $i \leqslant n$ et $j \geqslant n+1$ (la permutation est en effet strictement croissante sur $\{1,2,\dots,n\}$ et sur $\{n+1,\dots,2n\}$. Chaque entier $i \leqslant n$ est en inversion avec tous les entiers $j \geqslant n+1$ pour lesquels $\sigma(j) \leqslant \sigma(i) = 2i-1$. Il y en a exactement $i-1$ (puisque σ restreinte à $\{n+1,\dots,2n\}$ prend toutes les valeurs paires inférieures ou égales à $2i-1$, qui sont au nombre de $i-1$). Par exemple, 5 a pour image 9 et sera en inversion avec les quatre entiers $n+1$, $n+2$, $n+3$ et $n+4$ qui ont pour images respectives 2, 4, 6 et 8. Le nombre total d'inversions vaut donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i-1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$. Il ne reste plus qu'à étudier la parité de l'entier $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Si n est pair, le facteur $n-1$ étant impair, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ a la même parité que $\dfrac{n}{2}$. Si au contraire n est impair, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ a la même partité que $\dfrac{n-1}{2}$. La permutation σ est donc paire si $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 1[4]$ (même résultat que la question précédente de l'exercice).

Exercice 2 (*)

Pas besoin de s'embêter, on peut calculer l'image de chaque entier directement, il suffit pour cela d'enchainer les permutations de la décomposition proposée en démarrant à droite. Par exemple, 1 est envoyé sur 4, puis reste fixe par les deux permutations suivantes (qui n'ont pas 4 dans leur support), puis est envoyé sur 2, reste fixe, revient sur 4 et y reste, donc $\sigma(1) = 4$. On fait pareil pour tous les entiers, pour finalement obtenir $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 6\ \ 7\ \ 2\ \ 5)$. En fait, σ est simplement un cycle de longueur 7.

Exercice 3 (**)

On sait déjà que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions d'une part, et par les cycles d'autres part, donc tout sous-ensemble permettant d'obtenir toutes les transpositions ou tous les cycles suffira à engendrer le groupe. Il suffit en fait pour cela de deux éléments quelle que soit la valeur de n : la transposition $\tau = (1\ \ 2)$ et le cycle $c = (1\ \ 2\ \ \dots n)$. En effet, on calcule facilement $c \circ \tau \circ c^{-1} = (2\ \ 3)$ (rappelons en passant que $c^{-1} = c^{n-1}$ peut être obtenu en composant c par lui-même suffisamment de fois), puis $c^2 \circ \tau \circ c^{-2} = (3\ \ 4)$ et ainsi de suite. On a donc déjà engendré toutes les transpositions de la forme $(i\ \ i+1)$. À partir de celles-ci, on peut obtenir par récurrence sur i la permutation $(1\ \ i)$ en constatant que $(1\ \ i+1) = (i\ \ i+1)(1\ \ i)(i\ \ i+1)$ (bien entendu, l'initialisation est triviale puisque notre ensemble contient déjà la transposition $(1\ \ 2)$). Enfin, on écrit $(i\ \ j) = (1\ \ i)(1\ \ j)(1\ \ i)$ pour obtenir toutes les transpositions restantes.

On vient de voir que l'ensemble de quatre transpositions constitué de $(1\ \ 2)$, $(2\ \ 3)$, $(3\ \ 4)$ et $(4\ \ 5)$ suffisait par exemple pour engendrer $\mathfrak{S}_5$. Peut-on faire avec encore moins ? Si on ne garde que deux transpositions (qui déplacent deux éléments chacune), on aura au moins un élément de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui sera laissé fixe par nos deux transpositions, donc on ne peut pas engendrer tout le groupe symétrique. Supposons alors qu'on ait trois transpositions engendrant $\mathfrak{S}_5$. Comme chaque entier doit appartenir au support d'au moins une d'entre elles (sinon il serait point fixe pour chacune d'entre elles), on a nécessairement deux transpositions sur les trois dont le support est disjoint. On peut supposer (quitte à renommer les éléments de l'ensemble) qu'il s'agit de $(1\ \ 2)$ et $(3\ \ 4)$. La troisième transposition échange alors 5 avec l'un des quatre autres entiers, par exemple on peut prendre $(1\ \ 5)$ (tous les choix sont équivalents). On ne pourra alors jamais obtenir toutes les transpositions à partir de ces trois-là puisque 3 et 4 ne peuvent être échangés qu'entre eux. Il faut donc au moins quatre transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_5$.

Le raisonnement est plus laborieux mais similaire pour $\mathfrak{S}_8$: il faut au moins quatre transpositions pour que chaque entier appartienne au support d'une d'entre elles. Mais quatre seraient insuffisantes (les supports seraient disjoints, ce qui ne permettrait que d'effectuer des échanges d'un entier avec celui appartenant au même support). De même avec cinq ou même six transpositions : supposons par exemple qu'on prenne comme quatre premiers éléments les transpositions $(1\ \ 2)$, $(3\ \ 4)$, $(5\ \ 6)$ et $(7\ \ 8)$. Pour pouvoir échanger 1 avec d'autres éléments que 2, on doit rajouer une transposition contenant 1 ou 2 dans son support, par exemple $(1\ \ 3)$ (n'importe quelle autre serait équivalente). De même, pour ne pas laisser 5 et 6 isolés, il faut ajouter une sixième transposition contenant 5 ou 6 dans son support. Mais si le deuxième élément du support est 1, 2, 3 ou 4, on laissera 7 et 8 isolés ; s'il s'agit de 7 ou 8, on aura créé deux ensemble « interchangeables » ($\{1, 2, 3, 4\}$ d'un côté, $\{5, 6, 7, 8\}$ de l'autre) mais sans moyen d'échanger un élément du premier ensemble avec un élément du second. Il faudra donc une septième transposition pour cela. La démonstration effectuée n'est pas très rigoureuse, mais elle semble indiquer qu'il faudra toujours au minimum $n - 1$ transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$. C'est en effet le cas, on peut s'en convaincre plus rigoureusement en prouvant qu'un cycle de longueur n ne peut pas s'écrire comme produit de moins de $n - 1$ transpositions (ça se fait très bien par récurrence : il faut une transposition pour échanger le dernier élément avec un des autres, sinon il restera fixe, et ensuite on est ramenés au cas d'un cycle de longueur $n - 1$).

Exercice 4 (**)

Un cycle de longueur n est d'ordre n de façon assez immédiate. Il est alors facile de constater que le produit de deux cycles (ou plus) à support disjoint a pour ordre le ppcm des ordres (donc des longueurs) de ces cycles : en effet, si $\sigma = c \circ c'$, avec c et c' à support disjoint, alors c et c' commutent donc $\sigma^k = c^k \circ c'^k$ ne peut être égal à l'identité que si $c^k = c'^k = id$ (sinon, les supports étant disjoints, certains éléments ne pourraient pas rester fixes), donc si k est à la fois un multiple de la longueur de c et de celle de c'. Réciproquement, un tel multiple fonctionne de façon évidente, et le ppcm des longueurs est le plus petit d'entre eux. L'ordre d'un élément de $\mathfrak{S}_n$ est donc le ppcm des longueurs des cycles apparaissant dans sa décompostion en produit de cycles à support disjoint.

Si une permutation de $\mathfrak{S}_7$ n'a qu'un seul cycle dans sa décomposition, il ne peut pas être d'ordre 12. S'il est produit de deux cycles, il faudrait que le ppcm des deux longueurs soit égal à 12, ce qui ne peut se faire qu'avec des longueurs 4 et 3 (la somme des deux longueurs ne pouvant pas dépasser 7). S'il contient au moins trois cycles, on ne peut avoir que le cas de trois transpositions (ppcm égal à 2) ou de deux transpositions et un cycle de longueur 3 (ppcm égal à 6). Les seules permutations d'ordre 12 sont donc les produits de cycles de longueur 3 et de longueur 4 à supports disjoints. Reste à les compter. On choisit d'abord les entiers appartenant au support du cycle de longueur 3 de $\binom{7}{3} = 35$ façons. À partir de ces trois entiers, on ne peut créer que deux cycles de longueur 3 distincts (on choisit l'image du premier entier parmi les deux restants, et les autres images sont imposées). À partir des quatre entiers restants, on peut créer 6 cycles de longueur 4 (on choisit l'image du premier entier parmi les trois autres, puis l'image de son image parmi les deux entiers restants, et le reste est imposé). On a donc au total $35 \times 2 \times 6 = 420$ éléments d'ordre 12 dans $\mathfrak{S}_7$.

Exercice 5 (* à **)

- Pour le premier déterminant, on peut développer directement suivant la première colonne (ou la première ligne) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 24 + 2 \times 12 = 2$. Encore plus rapide : on fait $L_3 - 2L_1$ pour obtenir 0 0 2 sur la dernière ligne, on développe et on a quasiment directement 2.
- Pour le deuxième, on additionne les deux premières colonnes, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) = -6$.
- Plein de possiblités ici, mais le plus rapide est encore de développer directement par rapport à la deuxième ligne : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(10-2) - (-4-15) = -16 + 19 = 3$.
- On peut ici remplacer L_2 et L_3 par leur somme avec L_1 puis développer suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22$.
- Il s'agit ici d'un déterminant de Vandermonde, qui ne devrait évidemment pas vous poser de problème, mais contrairement à l'exemple traité en cours, on peut faire un calcul direct, par exemple en effectuant la différence des deux dernières lignes avec la première puis un développement suivant la première colonne, avec entre les deux une petite factorisation sur les deux dernières lignes : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
- Pour ce déterminant un peu vilain, pas vraiment de truc évident, le plus rapide est de développer suivant la première ligne et surtout de bien connaître ses formules de trigo : $D = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = \cos(a-b)(\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+$

$c)) - \cos(b-c)(\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)) + \cos(c-a)(\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b))$. On reconnait dans les parenthèses des formules d'addition de sinus pour obtenir $D = \cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \dfrac{1}{2}(\sin(2(a-b)) + \sin(2(b-c)) + \sin(2(c-a)))$. On peut encore simplifier en utilisant les transformations somme-produit : $\sin(2(a-b)) + \sin(2(b-c)) = 2\sin\left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b-b+c}{2}\right) = 2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)$. On en déduit (en redéveloppant le troisième sinus) que $D = \sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)(\cos(a+c-2b) - \cos(c-a))$. Allez, un dernier coup de somme-produit : $\cos(a+c-2b) - \cos(c-a) = -2\sin\left(\dfrac{a+c-2b+c-a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+c-2b-c+a}{2}\right) = -2\sin(c-b)\sin(a-b)$. Finalement, $D = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$.

- On peut commencer ici par soustraire la colonne du milieu aux deux autres, avant de factoriser puis développer par rapport à la dernière colonne : $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a & 0 \\ a-x & x & b-x \\ 0 & b & x-b \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)\left(\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & x \end{vmatrix}\right) = (x-a)(x-b)(x+a+b)$.
- Celui-ci est vite géré si on factorise tout ce qu'on peut avant de soustraire la deuxième colonne à la troisième, puis de développer par rapport à la dernière colonne : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a & a^2 \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1-a \end{vmatrix} = a^3(1-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^3(1-a)^2$.

Exercice 6 (**)

1. On fait évidemment attention à la taille des matrices manipulées : D_1 est le déterminant de la matrice deux lignes deux colonnes $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, qui vaut $a^2 - b^2$. Pour D_2, on doit calculer un déterminant quatre lignes quatre colonnes, ce qu'on va faire en développant par rapport à la première colonne, puis en redéveloppant chaque déterminant obtenu par rapport à la dernière colonne, celle où il n'y a qu'un seul coefficient non nul. On fait simplement attention à ne pas faire d'erreur de signe en cours de route : $D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^2$.
2. On effectue en fait exactement le même calcul que ci-dessus : $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} =$

$$a\begin{vmatrix} a & & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & 0 \\ \vdots & & a & b & & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ b & 0 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b \\ a & \ddots & & & & b & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & a & b & & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & & \vdots \\ 0 & b & & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2D_n - b^2D_n.$$ On a donc simplement $D_{n+1} = (a^2 - b^2)D_n$.

3. La suite D_n est tout simplement géométrique, et $\forall n \geqslant 1$, $D_n = (a^2 - b^2)^n$.

Exercice 7 (*)

1. Comme on va certainement en avoir besoin pour la deuxième question, autant prouver que la matrice J est inversible en calculant son déterminant. Pour cela, on va soustraire la première colonne à chacune des deux autres, puis factoriser et développer par rapport à la première ligne : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & j-1 & j^2-1 \\ 1 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = (j-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & j+1 \\ 1 & j+1 & 1 \end{vmatrix} = (j-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & j+1 \\ j+1 & 1 \end{vmatrix} = (j-1)^2(1-(j+1)^2) = (j-1)^2(-2j-j^2)$. Or, $1+j+j^2 = 0$ donc $-2j - j^2 = 1 - j$. Finalement, $\det(J) = (1-j)^3$.
2. Le produit donne $\begin{pmatrix} a+b+c & a+jb+j^2c & a+j^2b+jc \\ a+b+c & c+ja+j^2b & c+j^2a+jb \\ a+b+c & b+jc+j^2a & b+j^2c+ja \end{pmatrix}$. En factorisant chaque colonne, respectivement par $a+b+c$, $a+jb+j^2c$ et $a+j^2b+jc$, on constate que $\det(MJ) = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) \times \det(J)$ (en exploitant le fait que $j^3 = 1$). Comme on sait par ailleurs que $\det(MJ) = \det(M)\det(J)$, on en déduit que $\det(M) = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = a^3+b^3+c^3-3abc$ (en développant très brutalement le produit des trois facteurs, tous les produits de la forme a^2b ont pour coefficients $1+j+j^2$, donc disparaissent).

Exercice 8 (***)

Effectuons sur un exemple à quatre lignes quatre colonnes une ou deux opérations qui vont bien nous simplifier la vie : on remplace successivement C_1 par $C_1 - C_4$ puis L_1 par $L_1 - L_4$: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la première ligne : $|A_4| = -2|A_3| - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. On peut maintenant développer le dernier déterminant par rapport à la première ligne pour trouver $|A_4| = -2|A_3| - |A_2|$. En fait, ces opérations se généralisent sans problème pour la matrice A_n (je vous laisse écrire les matrices) pour donner $|A_n| = -2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ (le deuxième signe ne dépend pas de la parité de n car on multiplie une première fois par $(-1)^{n+1}$ et une deuxième par $(-1)^n$, ce qui donne toujours un signe $-$ à l'arrivée).

La suite des déterminants est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + 2x + 1 = 0$, soit $(x+1)^2$. On est en présence d'une racine double, on peut donc écrire

$|A_n| = (An+B)(-1)^n$. Or, $|A_0| = 1$, donc $B = 1$, et $|A_1| = 0 = -A-B$, donc $A = -1$ (ceux qui n'aiment vraiment pas les déterminants de matrices vides utiliseront $|A_2| = -1 = 2A+B$). Finalement, $|A_n| = (-1)^{n+1}(n-1)$.

Exercice 9 (**)

1. On calcule directement $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3$. Pour le suivant, en ayant au préalable jeté un oeil à la question suivante, on a très envie de le développer par rapport à la première colonne : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times D_2 - 2 = 4$. Même méthode pour D_4, en re-développant le deuxième déterminant obtenu par rapport à la première ligne : $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times D_3 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_3 - D_2 = 5$. Le déterminant D_1 sera égal à 2 (le seul coefficient de la matrice étant égal à 2), et le déterminant D_0 (déterminant vide) prend habituellement la valeur 1. Ces deux valeurs sont cohérentes avec la brillante conjecture qu'on peut faire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = n+1$.
2. C'est exactement le même calcul que pour D_4 (le premier déterminant obtenu est égal à D_{n-1}, le deuxième comporte une première ligne avec un seul 1 suivi de $n-2$ zéros, on redéveloppe et on trouve exactement D_{n-2}) donc $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$.
3. On reconnait évidemment une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$. Cette équation admet pour racine double $x = 1$, on en déduit l'existence de deux réels A et B tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = (An+B) \times 1^n = An + B$. Il ne reste plus qu'à exploiter les déterminants déjà calculés pour obtenir $A = B = 1$ (non, je ne détaille pas, c'est trop trivial), donc $D_n = n+1$ comme prévu.
4. La même méthode de calcul (développement par rapport à la première colonne, puis la première ligne pour le deuxième déterminant) donne la relation $D_{n+2} = 2\cos(\theta)D_{n+1} - D_n$. L'équation caractéristique est donc désormais $x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = 0$. Commençons par calculer le discriminant $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$. On peut distinguer deux cas :

   - si $\sin(\theta) = 0$, $\Delta = 0$. En fait, cela se produit uniquement si $\cos(\theta) = 1$ (donc des coefficients diagonaux égaux à 2, cas traité dans les premières questions de l'exercice), ou $\cos(\theta) = -1$. Dans ce deuxième cas, on a donc des coefficients diagonaux égaux à -2, et -1 est racine double de l'équation caractéristique, ce qui donne $D_n = (An+B) \times (-1)^n$. Or, $D_1 = -2$, donc $-A-B = -2$, et $D_2 = 3$, donc $2A+B = 3$, ce qui donne $A = B = 1$, donc $D_n = (-1)^n(n+1)$ (là aussi on pouvait décider que $D_0 = 1$).
   - sinon, $\Delta < 0$, et on a deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$. On en déduit l'existence de deux réels A et B tels que $D_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$. On ne pas s'embêter : $D_0 = 1$ donne $A = 1$, puis $D_1 = 2\cos(\theta)$ donne $B = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$, donc $D_n = \dfrac{\cos(n\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Exercice 10 (***)

Pas de raison de se laisser impressionner : la ligne i de notre matrice contient les coefficients binomiaux $\dbinom{n+i-1}{j}$, avec $j \in \{0, \dots, p-1\}$. On sait via la formule de Pascal que $\dbinom{n+i-1}{j} =$

$\binom{n+i-2}{j} + \binom{n+i-2}{j-1}$. On peut alors effectuer sur la dernière ligne de notre matrice l'opération $L_p \leftarrow L_p - L_{p-1}$ pour la transformer en $0 \quad 1 \quad \binom{n+p-2}{1} \quad \binom{n+p-2}{2} \quad \dots \quad \binom{n+p-2}{p-2}$. On effectue alors exactement de la même façon les opérations $L_{p-1} \leftarrow L_{p-1} - L_{p-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. En notant $D_{n,p}$ le déterminant initial, on constate alors que $D_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & 1 & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{p-2} \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \binom{n+p-2}{1} & \dots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix}$. Il suffit alors de développer par rapport à la première colonne pour constater que $D_{n,p} = D_{n,p-1}$. Comme $D_{n,1} = 1$ (la matrice ne contient alors qu'un seul coefficient égal à 1), on a donc toujours $D_{n,p} = 1$, indépendamment des valeurs de n et de p.

Exercice 11 (*)

Surtout pas de gros calculs en effet. L'application φ est de façon évidente une symétrie ($\varphi^2 = id$), on peut donc la diagonaliser de façon à ce que sa matrice représentative soit semblable à une matrice diagonale ne contenant que des 1 et des -1 sur la digonale. Plus précisément on aura un nombre de 1 correspondant à la dimension de l'ensemble des vecteurs invariants par φ (sous-espace par rapport auquel on symétrise), c'est-à-dire ici l'ensemble des matrices symétriques, et un nombre de -1 égal à la dimension de l'ensemble des vecteurs anti-invariants par φ (sous-espace parallèlement auquel on symétrise), ici l'ensemble des matrices antisymétriques. Or, on sait que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On en déduit immédiatement que $\det(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 12 (***)

Il existe plein de méthodes possibles pour cet exercice classique, en bon flemmard, je vais bien entendu vous donner la plus rapide histoire de ne pas justifier les trois étoiles attribués à l'exercice. On va pour cela ajouter à la première ligne du déterminant XL_2, puis X^2L_3 et ainsi de suite, et enfin développer par rapport à la première ligne :

$$\chi_C = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & X^2 & \dots & 0 & a_0 + a_1 X \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & X^3 & 0 & a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & X \\ \vdots & 0 & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} P(X) \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} P(X) \times (-1)^{n-1} = P(X).$$

Exercice 13 (**)

1. Cela découle de la définition explicite du déterminant : aucun terme ne peut dépasser le degré 4 en la variable x, et il existe exactement un terme, égal à x^4, faisant intervenir cette puissance, obtenue à partir de la permutation identité.
2. Un calcul ébouriffant de complexité donne $A(x)^\top A(x) = (x^2+y^2+z^2+t^2)I_4$. Comme $A(x)^\top$ est inversible si et seulement si $A(x)$ est inversible, l'inversibilité de $A(x)$ est équivalente à celle du produit qu'on vient de calculer. Autrement dit, $A(x)$ est inversible si et seulement si $x^2+y^2+z^2+t^2 \neq 0$, ce qui est le cas dès que $(x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$.
3. On sait que le déterminant de la transposée est égal au déterminant de la matrice de départ, donc $(\det(A(x)))^2 = (x^2+y^2+z^2+t^2)^4$ (ne pas oublier la puissance tout de même). Comme de plus $\det(A(x))$ est un polynôme unitaire, on en déduit directement que $\det(A(x)) = (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$.
4. Les résultats qui ne sont plus vrais : la matrice peut très bien ne pas être inversible sans avoir les quatre variables nulles, par exemple pour $(x,y,z,t) = (1,1,i,i)$. Le déterminant reste par contre le même.

Exercice 14 (*)

1. En effet, on sait que $\det(f^2) = (\det(f))^2$, et d'autre part que $\det(-id_E) = (-1)^n$. La condition demandée impose donc $(-1)^n > 0$, ce qui n'est le cas que si n est pair (bien entendu, ce serait faux dans un espace vectoriel complexe).
2. Le plus simple est de prendre une matrice représentant une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$, par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et de prendre pour f l'application canoniquement associée à M.
3. On peut obtenir un exemple très facilement en collant plusieurs exemplaires de la matrice précédente sur la diagonale d'une matrice de taille $2n$. Par exemple en dimension 6, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 (**)

Pour se donner une idée de ce qui se passe, on peut calculer les premières valeurs (on notera D_n le déterminant à calculer). Pour $n = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, puis (par exemple en développant par rapport à la dernière colonne) $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$. Pour la suite, on ne pourra toutefois pas s'en sortir comme ça. L'astuce la plus efficace consiste à effectuer immédiatement l'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_3 - L_2$: $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2D_3 = -4$. En fait, cette même opération marche pour tous les calculs suivants : si on considère le déterminant D_n, les trois dernières lignes de la matrice seront $\begin{vmatrix} F_{n-2} & F_{n-3} & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & 1 & 10 & 1 & \\ F_n & F_{n-1} & \dots & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, qui seront transformées en $\begin{vmatrix} F_{n-2} & F_{n-3} & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Un simple développement par rapport à la dernière ligne donne alors $D_n = -2D_{n-1}$. La suite est donc géométrique et, $\forall n \geqslant 2$, $D_n = -(-2)^{n-2}$.