Chapitre 24 : Groupe symétrique et déterminants.

MPSI Lycée Camille Jullian

21 mai 2026

Si je suis malheureux, je fais des maths pour devenir heureux.
Si je suis heureux, je fais des maths pour le rester.

Alfred Rényi

Qu'est-ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?

Un Kinder injectif (son noyau est réduit à zéro).

Ce chapitre a pour but de mettre en place un outil de calcul particulièrement puissant d'algèbre linéaire, le déterminant, qui a également des liens avec la géométrie puisqu'il s'agit en fait de définir une notion de volume dans un espace vectoriel de dimension finie. Mais pour introduire ce déterminant, il nous faudra d'abord passer par l'étude des groupes de permutations, qui nous feront faire un retour en arrière vers de l'algèbre plus générale. Les calculs de déterminant ne sont pas réellement indispensables en première année mais le deviendront en deuxième année via la notion de polynôme caractéristique (que nous nous contenterons de définir sans l'étudier dans ce chapitre) qui est un outil fondamental dans le cadre de la diagonalisation, puisqu'il permet d'obtenir facilement les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser les définitions et notations intervenant dans l'étude des groupes de permutations, et connaître les différentes décompositions possibles d'une permutation.
- maîtriser les différentes techniques de calcul du déterminant d'une matrice, et les applications classiques de ces calculs.

1 Groupe symétrique.

Les groupes symétriques (aussi appelés groupes de permutations) sont les groupes obtenus en étudiant les permutations d'un ensemble fini. Ils ont une importance théorique énorme car leur structure est assez facile à étudier, et que cette étude a des applications dans énormément de branches des mathématiques. Pour donner un simple exemple, la démonstration de Galois du fait qu'on ne peut pas résoudre par radicaux les équations polynômiales de degré supérieur ou égal à 5 est basée sur l'étude de ces groupes (étude qui donnera d'ailleurs lieu à la définition de la notion de groupe).

1.1 Structure du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Définition 1. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le groupe constitué de l'ensemble des applications bijectives (permutations) de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même, muni de la loi $\circ$. Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sera souvent noté $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque 1. Le groupe $\mathfrak{S}_n$, aussi appelé groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, est un groupe fini de cardinal $n!$. Il est non commutatif dès que $n \geqslant 3$. On notera bien sûr σ^{-1} la permutation réciproque de σ, qu'on désignera aussi comme « l'inverse » de σ. On étendra d'ailleurs cet abus de notation en parlant régulièrement de « produit » de permutations pour désigner leur composée.

Exemple : Pour $n = 4$, la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ se contente d'échanger les deux éléments 1 et 4 en laissant fixes les éléments 2 et 3. Une permutation ne laissant aucun entier fixe est aussi appelée permutation **sans point fixe**. La permutation id, qui est l'élément neutre du groupe $\mathfrak{S}_n$, laisse bien sûr tous les éléments fixes.

Définition 2. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un **cycle** s'il existe des entiers i_1, i_2, …, i_k vérifiant $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, …, $\sigma(i_{k-1}) = i_k$, $\sigma(i_k) = i_1$, et si les entiers n'appartenant pas à la liste $(i_1, \dots, i_k)$ sont tous laissés fixes par σ. L'entier k est alors appelé **longueur** du cycle σ, et l'ensemble $\{i_1, \dots, i_k\}$ est le **support** du cycle σ. Un cycle sera plus simplement noté $\sigma = (i_1 \ \ i_2 \ \ \dots \ \ i_k)$.

Remarque 2. Par convention, on accepte que l'identité soit considérée comme un cycle de support vide et de longueur nulle.

Exemple : pour $n = 6$, la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur 4 (si un cycle admet k points fixes, sa longueur sera toujours égale à $n - k$), de support $\{2, 5, 4, 6\}$. On la notera donc plus simplement $(2 \ \ 5 \ \ 4 \ \ 6)$. Notons en passant que cette écriture abrégée n'est pas unique puisqu'on pourrait tout aussi bien noter notre cycle $(4 \ \ 6 \ \ 2 \ \ 5)$.

Remarque 3. L'inverse d'un cycle est toujours un cycle. Plus précisément, si $\sigma = (i_1 \ \ i_2 \ \ \dots \ \ i_k)$, alors $\sigma^{-1} = (i_k \ \ i_{k-1} \ \ \dots \ \ i_1)$.

Définition 3. Un cycle de longueur 2 est appelé **transposition**.

Autrement dit, une transposition est une permutation se contentant d'échanger deux éléments de l'ensemble.

Théorème 1. Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut se décomposer comme un produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des termes près.

Exemple : la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ peut se décomposer comme produit d'un cycle de longueur 3 et d'une permutation, sous la forme $(4 \ \ 6 \ \ 5) \circ (1 \ \ 3)$. Les seuls éléments n'apparaissant dans le support d'aucun cycle de la décomposition sont les points fixes de la permutation.

Démonstration. La démonstration n'est pas officiellement au programme, mais son fonctionnement intuitif est en fait assez clair : en notant σ notre permutation, on parcourt la liste des entiers, et pour chaque entier i, on calcule $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$ et ainsi de suite jusqu'à trouver le plus petit entier k pour lequel $\sigma^k(i) = i$ (si i est un point fixe, on aura simplement $k = 1$). Le cycle $(i \ \ \sigma(i) \ \ \sigma^2(i) \ \ \dots \sigma^{k-1}(i))$ fera alors partie de notre décomposition. Si on compose tous les cycles obtenus, en sautant à chaque fois les entiers apparaissant déjà dans un des cycles précédemment constitués, on obtiendra exactement la permutation σ. Une façon un peu plus théorique de voir les choses : on définit sur $\{1, 2, \dots, n\}$ une relation $\mathcal{R}$ en posant que $i\mathcal{R}j$ s'il existe un entier k tel que $\sigma^k(i) = j$. On prouve facilement que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence de cette relation constitueront exactement les supports des cycles intervenant dans la décomposition de σ (les classes ne contenant qu'un seul élément correspondant aux points fixes). $\square$

Remarque 4. Les cycles à supports disjoints commutent toujours entre eux, l'ordre dans lequel on écrit la décomposition n'a donc aucune importance.

Corollaire 1. Toute permutation peut être décomposée en produit de transpositions.

Démonstration. En appliquant le théorème précédent, il suffit de prouver qu'un cycle peut toujours être décomposé comme produit de permutations. Or, $(i_1\ \ i_2\ \ \dots\ \ i_k) = (i_1\ \ i_2)(i_2\ \ i_3)\dots(i_{k-1}\ \ i_k)$. $\square$

Remarque 5. Attention, car cette nouvelle décomposition n'est pas du tout constituée d'éléments qui commutent. Elle n'est par ailleurs plus du tout unique.

Exemple : si on reprend la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on peut par exemple la décomposer en $(4\ \ 6)(6\ \ 5)(1\ \ 3)$.

1.2 Signature d'une permutation.

Définition 4. Le **nombre d'inversions** I_σ d'une permutation σ est le nombre de paires d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, mais $\sigma(i) > \sigma(j)$. La **signature** de σ est le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma}$. La permutation σ est **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$, **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exemples : la permutation id est paire puisqu'elle a un nombre d'inversions nul (c'est d'ailleurs la seule).

La transposition $(i\ \ j)$ est toujours impaire. En effet, en supposant $i < j$, les seules paires en inversion pour cette transposition sont les couples $(i\ \ k)$, avec $k \in \{i+1, \dots, j\}$, et les couples $(k\ \ j)$, avec $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$ (il ne faut pas compter deux fois le couple (i, j)). On en déduit que $I_\sigma = j - i + j - i - 1 = 2(j - i) - 1$, qui est toujours un entier impair.

Proposition 1. La signature d'une permutation σ peut être calculée via la formule $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Démonstration. Par définition, l'application $(i, j) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j))$ est une bijection sur l'ensemble des couples d'entiers inférieurs ou égaux à n. Les produits $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\sigma(j) - \sigma(i))$ et $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i)$ sont donc constitués des mêmes éléments (mais pas dans le même ordre), au signe près. Plus précisément, le signe change un nombre de fois égal au nombre d'inversions de la permutation σ, donc le quotient des produits vaut 1 si ce nombre est pair et -1 s'il est impair, ce qui est exactement la définition de la signature. $\square$

Théorème 2. La signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes : $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Démonstration. C'est en fait assez évident avec la formule donnée précédemment pour la signature : $\varepsilon(\sigma\sigma') = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{j-i} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j)-\sigma'(i)} \times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma'(j)-\sigma'(i)}{j-i}$. Le deuxième produit n'est autre que $\varepsilon(\sigma)$, et le premier est égal à $\varepsilon(\sigma')$ (les termes sont simplement « dans le désordre » suite à la composition par σ', mais on a bien tous les quotients pour toutes les paires d'entiers). □

Remarque 6. Puisqu'une transposition est toujours impaire, la signature de σ correspond donc à la parité du nombre de transpositions apparaissant dans une décomposition de σ en produit de transpositions (peu importe quelle décomposition on choisit, la parité sera toujours la même). Ainsi, par exemple, la signature d'un cycle de longueur k sera égale à $(-1)^{k-1}$.

Exemple : La signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ peut se calculer en la décomposant en produit de cycles : $\sigma = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 7)(2\ \ 10)(5\ \ 9\ \ 8)$, donc σ est le produit de deux cycles pairs (ceux de longueur 3 et 5) et d'une transposition, il s'agit d'une permutation impaire.

Définition 5. Le **groupe alterné** $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ constitué de toutes les permutations paires.

Remarque 7. Il s'agit bien d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ puisqu'il est par définition le noyau de la signature. Il est d'ailleurs facile de prouver que son cardinal est égal à $\frac{n!}{2}$ à partir de cette constation.

2 Déterminant.

Le déterminant est un outil géométrique servant à étudier la colinéarité de vecteurs dans le plan (vous l'avez d'ailleurs sûrement déjà croisé même si vous ne vous souvenez pas de ce terme de vocabulaire). Mais on peut en fait le généraliser à trois vecteurs dans l'espace (pour caractériser désormais la coplanarité), puis à une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n (en lien avec une notion de volume dont les histoires de colinéarité et de coplanarité ne sont en fait qu'une conséquence). Ce déterminant généralisé garde une signification géométrique mais nous servira surtout pour l'instant à déterminer rapidement si une famille de vecteurs est libre, ou si une matrice est inversible.

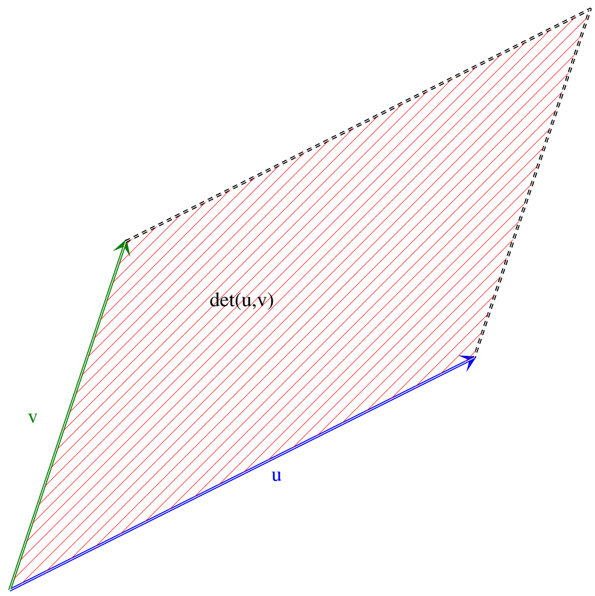
2.1 Déterminant de deux vecteurs du plan.

Définition 6. Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan, le **déterminant** de ces deux vecteurs est le nombre réel $\det(u,v) = \|u\| \times \|v\| \times \sin(\alpha)$, où α est l'angle (orienté) formé par les deux vecteurs u et v. On peut aussi le noter $[u,v]$ ou encore $|u\ \ v|$, notation cohérente avec le déterminant matriciel que nous définirons plus loin.

Remarque 8. Il s'agit vraiment ici d'une définition purement géométrique, qui suppose qu'on puisse définir correctement la notion d'angle entre deux vecteurs. En fait, cette notion d'angle ne peut exister dans un espace vectoriel quelconque que si on a préalablement fixé un produit scalaire permettant de définir la notion d'orthogonalité. Le fait que l'angle soit orienté signifie simplement que le déterminant de deux vecteurs du plan peut très bien être négatif. Il sera en fait positif uniquement si les deux vecteurs u et v forment (dans cet ordre) ce qu'on appelle généralement une base directe du plan. Le déterminant dans $\mathbb{R}^n$ permettra de même de définir une **orientation** de l'espace.

Proposition 2. Deux vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $\det(u,v) = 0$.

Remarque 9. Le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v. Cette aire sera négative quand la base (u, v) est indirecte (on utilise donc la valeur absolue du déterminant pour calculer des aires en pratique).



Proposition 3. Propriétés fondamentales du déterminant.

Le déterminant est :

- bilinéaire : $\det(u, \lambda v + w) = \lambda \det(u, v) + \det(u, w)$ et $\det(\lambda u + v, w) = \lambda \det(u, w) + \det(v, w)$.
- antisymétrique : $\det(u, v) = -\det(v, u)$.
- alterné : $\det(u, u) = 0$.

Remarque 10. Ces trois propriétés (ou plutôt les deux premières car la troisième découle en fait de la deuxième) sont caractéristiques du déterminant au sens où il n'existe (à une multiplication par une constante près) qu'une seule application prenant comme variables deux vecteurs du plan et renvoyant un réel, et vérifiant ces propriétés. Ce sont ces propriétés caractéristiques qui vont permettre de généraliser l'emploi du déterminant en dimension n un peu plus loin.

Proposition 4. Soient u et v deux vecteurs du plan ayant pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, alors $\det(u, v) = xy' - x'y$.

Démonstration. En notant r et r' les normes des vecteurs u et v, et α et β leurs « arguments » (angles par rapport au premier vecteur du repère choisi), les vecteurs u et v ont pour coordonnées respectives $(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$ et $(r'\cos(\beta), r'\sin(\beta))$. On peut donc calculer aisément $xy' - x'y = rr'(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)) = rr'\sin(\beta - \alpha) = \det(u, v)$ (l'angle $\beta - \alpha$ étant bien l'angle orienté formé par les deux vecteurs u et v). $\square$

Exemple : cette formule permet de calculer très rapidement les aires d'objets gométriques simples dans le plan. Ainsi, si on considère les trois points $A(2,-1)$, $B(3,0)$ et $C(-2,2)$ (coordonnées données dans un repère orthonormal du plan), on peut calculer l'aire du triangle ABC (qui est simplement la moitié de celle du parallélogramme basé sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) en calculant $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}|\det((1,1),(-4,3))| = \frac{1}{2}|3+4| = \frac{7}{2}$. On aurait obtenu la même valeur en calculant par exemple $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA})|$.

2.2 Déterminant de trois vecteurs de l'espace.

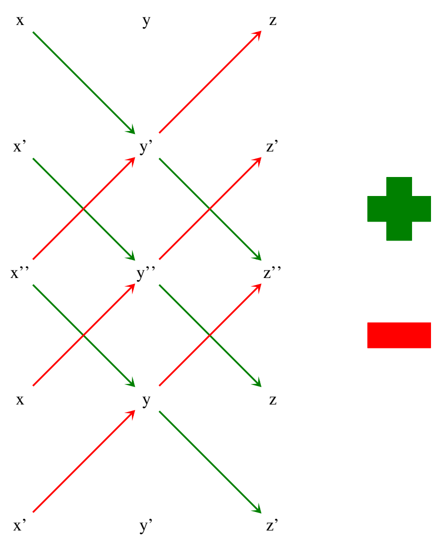
Définition 7. Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace, leur **déterminant** (aussi appelé **produit mixte**) est le nombre réel $(u \wedge v).w$. On le note $[u,v,w]$, ou encore $\det(u,v,w)$, ou même $|u \quad v \quad w|$.

Remarque 11. Cette définition est encore plus problématique que celle donnée dans le paragraphe précédent dans la mesure où elle fait intervenir deux outils (produit scalaire et produit vectoriel) que nous n'avons pas évoqués en maths cette année. En fait, on peut la remplacer par une définition plus purement géométrique (et donc plus proche de celle donnée dans le plan) où le déterminant est défini comme produit des normes des trois vecteurs par des sinus d'angles bien choisis, mais la définition de ces angles dans l'espace est plus compliquée qu'il n'y parait. Nous allons de toute façon en pratique uniquement exploiter la formule donnée dans la propriété suivante.

Proposition 5. Trois vecteurs u, v et w sont coplanaires si et seulement si $\det(u,v,w) = 0$.

Proposition 6. Si u, v et w ont pour coordonnées respectives (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'') dans un repère orthonormal direct de l'espace, alors $\det(u,v,w) = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$.

Méthode : Pour calculer un peu plus rapidement les déterminants (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme suivant (on recopie en ligne les coordonnées des trois vecteurs, en écrivant une deuxième fois les deux premiers vecteurs) :



On additionne les trois produits obtenus les long des diagonales descendantes, et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes. Une façon un peu plus tordue de voir les choses : on écrit les six produits possibles faisant intervenir une variable x, une variable y, une variable z, une variable « sans prime », une variable « avec un prime » et une variable « avec deux primes », et on met un signe plus devant les trois termes où peut lire xyz dans cet ordre de gauche à droite (quitte à boucler pour revenir au début), un signe moins devant ceux où on lira xyz de droite à gauche. Cette façon de faire peut paraitre ridicule mais elle se généralise très bien, contrairement à la règle de Sarrus qui elle ne fonctionne qu'en dimension 3.

Remarque 12. On retrouve également une interprétation géométrique du déterminant : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs u, v et w.

Proposition 7. Propriétés fondamentales du déterminant.

Le déterminant dans $\mathbb{R}^3$ est :

- trilinéaire : $\det(u,v,\lambda w+t) = \lambda \det(u,v,w)+\det(u,v,t)$, et de même pour les deux autres variables.
- antisymétrique : si on échange deux des trois vecteurs dans un déterminant, on change son signe, par exemple $\det(w,v,u) = -\det(u,v,w)$, mais $\det(v,w,u) = \det(u,v,w)$ car on a fait ici deux échanges successifs de deux vecteurs.
- alterné : si deux des trois vecteurs u, v et w sont égaux, alors $\det(u,v,w) = 0$.

2.3 Applications multilinéaires dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 8. Si E_1, E_2, ..., E_n et F sont des espaces vectoriels, une application $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ est **n-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire si chacune des applications $f_i : u \mapsto f(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, u, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ est une application linéaire, quel que soit l'entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et quels que soient les vecteurs $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ fixés dans $E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$. Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme n-linéaire**.

Remarque 13. Si $n = 2$ ou $n = 3$, on dira simplement que l'application f est bilinéaire ou trilinéaire, comme on l'a vu plus haut pour le déterminant des vecteurs du plan ou de l'espace. En pratique on n'étudiera par la suite que des applications f pour lesquelles tous les espaces vectoriels E_i sont identifiques, donc des applications $f : E^n \to F$.

Exemples : en notant $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, le produit de fonctions est une application bilinéaires de $E \times E$ dans E.

Le produit matriciel est une application bilinéaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

Définition 9. Une application $f : E^n \to F$ n-linéaire est :

- **symétrique** si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = f(u_1, \ldots, u_n)$.
- **antisymétrique** si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \ldots, u_n)$.
- **alternée** si, quand il existe deux indices $i < j$ tels que $u_i = u_j$, alors $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$.

Remarque 14. Si f est une application n-linéaire alternée, elle s'annule sur toute famille liée de vecteurs de E. En effet, dans une telle famille, un vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, et la multi-linéarité permet alors de décomposer $f(u_1, \ldots, u_n)$ en une somme de termes qui sont tous nuls d'après l'hypothèse d'alternance.

Exemples : le produit de fonctions est une application bilinéaire symétrique mais pas alternée, le produit matriciel ne vérifie aucune de ces propriétés.

Proposition 8. Une application n-linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Démonstration. Supposons f alternée, alors $f(u_1, \dots, u_i+u_j, \dots, u_i+u_j, \dots, u_n) = 0$ (en ayant placé les deux occurrences de $u_i + u_j$ en positions i et j de la liste de vecteurs), donc en développant via la linéarité $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$ (les deux autres s'annulent à cause de l'hypothèse d'alternance), donc $f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n)$, ce qui prouve que la condition d'antisymétrie est vérifiée pour toute transposition $(i\ \ j)$. Comme toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions, l'antisymétrie de f en découle. Réciproquement, si f est antisymétrique, $f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_n)$ (en appliquant une transposition pour échanger les deux occurrences du même vecteur), ce qui prouve l'alternance de f. □

Théorème 3. L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel E de dimension n est un espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. Supposons donc $\dim(E) = n$, et notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $f : E^n \mapsto \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée, la multi-linéarité permet d'écrire, pour tous vecteurs $u_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{1,k} e_k$, …, $u_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k} e_k$, …, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} e_k$, que $f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{1,2,\dots,n\}^n} \lambda_{1,k_1}\lambda_{2,k_2}\dots\lambda_{n,k_n} f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n})$. Dans cette superbe somme, tous les termes pour lesquels il existe des indices k_i et k_j égaux vont apporter une contribution nulle (à cause de l'alternance, puisqu'un vecteur de la base apparaitra deux fois dans le calcul de f). Ne restent donc que les termes correspondant à une permutation des indices initiaux, ce qu'on peut écrire sous la forme $f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_{i,\sigma(i)}\right) f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. On peut désormais appliquer l'antisymétrie de l'application pour affirmer que $f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_{i,\sigma(i)}\right) f(e_1, \dots, e_n)$. La valeur de $f(e_1, \dots, e_n)$ étant constante, notre application f est donc proportionnelle à l'application $f_0 : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_{i,\sigma(i)}\right)$. L'application f_0 est une forme n-linéaire alternée non nulle (car $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$, il n'y a alors qu'un seul terme non nul dans la somme correspondant à la permutation identité) qui forme donc une base de l'espace des formes n-linéaires alternées sur E, ce qui prouve bien le théorème. □

2.4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 10. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, l'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_{i,\sigma(i)}\right)$ définie dans la démonstration effectuée ci-dessus est appelée **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ et notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Il s'agit d'après ce qui précède de l'unique forme n-linéaire alternée sur E vérifiant $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Remarque 15. En notant det le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ auront pour déterminant $\det(u, v) = xy' - x'y$ (il n'existe en effet que deux permutations dans $\mathfrak{S}_2$, l'une paire et l'autre impaire). De même, on retrouvera la formule usuelle pour le déterminant dans la base canonique de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On comprend alors que le déterminant en base $\mathcal{B}$ consiste à définir dans E^n un volume en prenant comme unité de volume celui du parallélépipède de base $\mathcal{B}$.

Proposition 9. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. En effet, on sait que les deux applications sont proportionnelles, donc $\det_{\mathcal{B}'} = \alpha \det_{\mathcal{B}}$. Il suffit d'appliquer la formule à la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ pour en déduire que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \alpha \times 1$. □

Proposition 10. Une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de n vecteurs est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration. En effet, on a déjà vu que toute famille liée avait une image nulle par une forme linéaire n-alternée. Réciproquement, si la famille n'est pas liée, elle est une base (puisque constituée de n vecteurs), et la relation démontrée juste avant prouve que son déterminant dans la base $\mathcal{B}$ ne peut pas être nulle (sinon l'application $\det_{\mathcal{B}}$ serait nulle, ce qui est absurde). □

Définition 11. On peut définir sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement de tout espace vectoriel réel de dimension finie) une relation d'équivalence de la façon suivante : $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. Définir une **orientation** sur $\mathbb{R}^n$ revient à choisir une des deux classes d'équivalence de cette relation comme étant constitué des bases **directes**, l'autre classe d'équivalence étant constituée de bases **indirectes**.

Remarque 16. Cette définition laisse entendre qu'il n'existe que deux classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. En effet, si on note E_1 l'ensemble des bases ayant un déterminant strictement positif dans la base canonique, et E_2 l'ensemble des bases ayant un déterminant strictement négatif dans la base canonique, deux bases de E_1 ou de E_2 sont toujours dans la même classe d'équivalence (puisque $\det_{can}(\mathcal{B}') = \det_{can}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$). Le choix d'une orientation plutôt que l'autre est donc complètement arbitraire, même si on appelle orientation **canonique** celle qui donne à la base canonique le statut de base directe.

2.5 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 12. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, le **déterminant** de la matrice M est le déterminant de la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ constituée par les colonnes de la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(M)$, ou plus simplement $|M|$.

Remarque 17. Parler de déterminant d'une matrice qui n'est pas carrée n'a absolument aucun sens.

Exemple : Le déterminant de la matrice I_n vaut 1. Plus généralement, le déterminant d'une matrice diagonale ou même triangulaire (supérieure ou inférieure, peu importe) est le produit de ses coefficients diagonaux (il n'y a en effet dans ce cas qu'un seul terme non nul dans la somme définissant le déterminant, celui correspondant à la permutation identité).

Remarque 18. À l'aide de l'étude théorique précédente, on peut constater qu'en notant $m_{i,j}$ les coefficients de la matrice M, on aura $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$. On retrouve ainsi les formules usuelles pour les déterminants de petites matrices, notamment $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Théorème 4. Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait qu'une matrice est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. □

Proposition 11. Propriétés élémentaires du déterminant.

- $\det(M^\top) = \det(M)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
- Si M est inversible, $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$

Démonstration. L'invariance par transposition (de matrices !) découle directement de la définition explicite du déterminant : comme une permutation σ a toujours la même signature que sa réciproque σ^{-1}, le terme $\prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$ apparait dans la somme avec le même signe que le terme $\prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$, on effectue donc les mêmes calculs pour obtenir $\det(M^\top)$ que pour $\det(M)$. La règle sur le produit extérieur est une conséquence directe de la multilinéarité du déterminant.

La multiplicativité du déterminant est plus intéressante : si on note $\varphi : A \mapsto \det(MA)$ (où la matrice M est donc fixée), l'application φ est une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$ (en considérant les colonnes de A comme les variables de l'application), donc est proportionnelle au déterminant. Autrement dit, il existe une constante α telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(MA) = \alpha \det(A)$. En appliquant cette relation à la matrice identité, on obtient $\det(M) = \alpha \times 1$, donc $\alpha = \det(M)$ et $\det(MA) = \det(M)\det(A)$, exactement ce qu'on voulait prouver. La régle sur le déterminant d'un inverse en découle : $M^{-1}M = I_n$, donc $\det(M^{-1})\det(M) = 1$. □

Définition 13. Le **polynôme caractéristique** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Remarque 19. Ce polynôme en est bel et bien un, et même un polynôme unitaire de degré n (cela découle de la définition explicite du déterminant, le seul terme de degré n obtenu en calculant $\det(XI_n - M)$ est celui qui est produit de tous les termes diagonaux de la matrice $XI_n - M$, ce qui donne bien un polynôme unitaire de degré n.

Proposition 12. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la matrice M.

Démonstration. En effet, λ est racine de χ_M si et seulement si $\det(\lambda I_n - M) = 0$, donc si et seulement si la matrice $M - \lambda I_n$ a un noyau non nul (elle n'est pas bijective, donc pas injective), ce qui est exactement la définition des valeurs propres. □

Remarque 20. Le déterminant, et plus généralement le polynôme caractéristique, sont invariants par similitude : si $N = P^{-1}MP$, alors $\det(N) = \det(M)$ et $\chi_N = \chi_M$.

2.6 Techniques de calcul du déterminant.

Proposition 13. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :

- l'échange de deux lignes change le signe du déterminant.
- le produit d'une ligne par une constante λ multiplie le déterminant de la matrice par la même constante λ.
- une combinaison du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant de la matrice.

On a exactement les mêmes propriétés pour les opérations sur les colonnes.

Remarque 21. Ces propriétés donnent en pratique un algorithme de calcul explicite du déterminant d'une matrice : on effectue un « demi-pivot de Gauss » pour transformer la matrice en une matrice triangulaire supérieure (ce qui ne va modifier que marginalement le déterminant de la matrice, changements de signes ou produits par des constantes au pire), et on peut alors simplement calculer le déterminant de la matrice obtenue en faisant le produit de ses coefficients diagonaux. En pratique, c'est même encore mieux qu'un pivot de Gauss classique puisqu'on peut à tout moment décider de faire des opérations sur les lignes ou sur les colonnes (et même de mélanger les deux). Et on dispose en plus d'une dernière technique de calcul décrite ci-dessous, qui permet de tranformer un déterminant de taille n en plusieurs déterminants de taille $n - 1$.

Définition 14. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$:

- le **mineur d'indices** (i, j) de la matrice M est le déterminant $D_{i,j}$ de la matrice $\tilde{M} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de M en y supprimant la ligne i et la colonne j.
- le réel $(-1)^{i+j} D_{i,j}$ est appelé **cofacteur d'indices** (i, j) de la matrice M.
- la **comatrice** de la matrice M est la matrice de ses cofacteurs : $\mathrm{Com}(M) = ((-1)^{i+j} D_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition 14. Développement suivant une ligne ou une colonne d'un déterminant.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} D_{i,j}$, où $D_{i,j}$ est le mineur d'indices (i, j) de la matrice M.

De même, $\det(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} D_{i,j}$.

Exemple : Si on développe le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ suivant la deuxième ligne, on trouvera $\det(M) = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$. Les plus curieux remarqueront que c'est une façon assez rapide de démontrer la règle de Sarrus. On peut d'ailleurs tout aussi bien obtenir une formule explicite « de type Sarrus » en développant par rapport à sa première ligne une matrice à quatre lignes et quatre colonnes, puis en appliquant Sarrus sur chacun des plus petits déterminants qui vont apparaitre, mais on aura bien comme prévu 24 termes à la fin !

Remarque 22. En pratique, on essaiera d'appliquer cette technique de développement suivant une ligne à une ligne contenant déjà un (ou plusieurs) zéros, ce qui laisse moins de « petits » déterminants à calculer ensuite. Classiquement, les calculs de déterminant se font en fait en deux temps : d'abord une ou plusieurs opérations sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaitre rapidement quelques zéros, puis développement suivant une ligne ou une colonne pour terminer le calcul.

Exemple : On souhaite calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On commence par exemple par effectuer l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, qui ne modifie pas le déterminant. Autrement dit, $\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. On effectue maintenant un développement par rapport à la première ligne : $\det(M) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+1) - 3(-4+3) = -3+3 = 0$ (la matrice M n'est donc pas inversible).

Exemple : Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, où a, b et c sont trois réels quelconques, on peut commencer par soustraire la première colonne à chacune des deux autres puis factoriser et enfin développer suivant la dernière ligne : $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & (a-b)c & (a-c)b \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} bc & c & b \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} c & b \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$.

Exemple : On souhaite calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour cela, un simple développement par rapport à la deuxième ligne suffira :
$\chi_M = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & 1 \\ -2 & X-4 & -2 \\ 1 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-4)\begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-4)((X-3)^2-1) = (X-4)^2(X-2)$. La forme factorisée permet d'obtenir immédiatement les deux valeurs propres de la matrice : $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

Tant qu'on y est, on peut regarder si la matrice M (ou son endomorphisme canoniquement associé $f : (x, y, z) \mapsto (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$ si on préfère) est diagonalisable. Puisqu'on n'a que deux valeurs propres, il faut espérer qu'il y ait suffisamment de vecteur propres associés pour que cela soit possible. Commençons par chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 : en notant $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on aura $f(u) = 2u$ si $\begin{cases} x & & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{cases}$. Les deux équations extrêmes sont manifestement équivalentes et donnent la condition $z = x$. La deuxième équation impose alors $y = -2x$, donc $\ker(f - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$. Cherchons maintenant les vecteurs propres associés à la valeur propre 4 (comme c'est elle qui est racine double du polynôme caractéristique, c'est nécessairement pour cette valeur propre qu'on trouvera un plan de vecteurs propres si f est diagonalisable,

comme vous l'apprendrez l'an prochain) : $f(u) = 4u$ donne le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & z & = & 0 \end{array} \right.$.
Cette fois-ci, les trois équations sont équivalentes, et $\ker(f - 4\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ (ne pas oublier qu'il n'y a aucune condition imposée sur y). La famille $\mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,1,0),(1,-2,1)))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on le vérifie facilement, mais vous aurez des théorèmes l'an prochain permettant de l'affirmer sans vérification), et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 5. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M(\mathrm{Com}(M))^\top = (\mathrm{Com}(M))^\top M = \det(M) I_n$.

En particulier, si M est inversible, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}(\mathrm{Com}(M))^\top$.

Démonstration. Le coefficient d'indices (i,j) de la matrice $M(\mathrm{Com}(M))^\top$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}(-1)^{k+j} D_{j,k}$ (avec les notation habituelles pour les mineurs de la matrice M). Si $i = j$, cette valeur est égale à $\det(M)$, c'est exactement la formule de développement par rapport à la ligne i du déterminant de M. Si $i \neq j$, notons N la matrice obtenue à partir de M en recopiant sa i-ème ligne dans la j-ème (tout en laissant la i-ème ligne intacte), alors les mineurs $D_{j,k}$ sont les mêmes pour les matrices M et N et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}(-1)^{k+j} D_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} n_{jk}(-1)^{k+j} D_{j,k} = \det(N) = 0$ puisque la matrice N contient deux lignes identiques. La matrice $M(\mathrm{Com}(M))^\top$ est donc diagonale avec des coefficients diagonaux tout égaux à $\det(M)$, elle vaut bien $\det(M) I_n$. □

Remarque 23. Cette formule de calcul d'un inverse de matrice est totalement inutilisable en pratique, sauf dans le cas d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où on retrouve la formule bien connue $M^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple : On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant $V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$, où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On va prouver que $V_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ par récurrence sur l'entier n.
Pour $n = 1$, $V_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0$, ce qui correspond bien à la formule annoncée. Supposons donc la formule vraie pour un entier n, et posons $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n+1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n+1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n+1} \end{vmatrix}$. En développant ce déterminant par rapport à sa dernière ligne, on va obtenir une expression de $P(x)$ qui sera polynômiale, de degré majoré par $n+1$. Ce polynôme s'annule nécessairement pour $x = a_i$ (dans ce cas, on a un déterminant avec deux lignes complètement identiques), ce qui fait $n+1$ racines distinctes

pour notre polynôme de degré $n+1$ (si jamais les a_i ne sont pas tous distincts, le déterminant est nul de façon triviale et la formule fonctionne), qui peut donc s'écrire sous la forme $P(x) = \alpha \prod_{i=0}^{n} (x - a_i)$.

En particulier, $V_{n+1} = P(a_{n+1}) = \alpha \prod_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i)$. Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient dominant du polynôme P : or, celui-ci correspondant au dernier terme du développement de $P(x)$ suivant la dernière ligne de la matrice, c'est le cofacteur d'indices $(n+2, n+2)$ qui vaut exactement V_n. Finalement, $V_{n+1} = V_n \prod_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i)$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

Définition 15. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant** de l'endomorphisme f est celui de sa matrice représentative M dans n'importe quelle base de E.

Démonstration. Ce déterminant est effectivement indépendant de la base choisie : si M et M' sont deux matrices représentant une même application linéaire, on sait que $M' = P^{-1}MP$, où P est une matrice de passage inversible, donc $\det(M') = \det(P^{-1}) \times \det(M) \times \det(P) = \det(M)$ puisque $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$. □

Remarque 24. Les propriétés du déterminant matriciel s'adaptent naturellement au déterminant d'endomorphisme, en particulier les résultats suivants :

- f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
- si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$.