Chapitre 7 : Nombres complexes

MPSI Lycée Camille Jullian

26 novembre 2025

Les mathématiques consistent à prouver des choses évidentes par des moyens complexes.

George Polya

Les nombres remarquables sont de sortie en discothèque.
e et π s'amusent comme des fous, mais i reste scotché au bar.
e va alors voir i et lui dit : « Allez, viens dans $\mathbb{C}$! »

Pour ce nouveau gros chapitre, nous allons revenir sur une notion que la plupart d'entre vous ont déjà abordée en Maths Expertes l'an dernier, celle de nombres complexes. Ces derniers forment un outil fondamental en mathématiques, à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue pratique (notamment en géometrie, comme on le verra un peu plus loin), et se trouvent de ce fait à la croisée entre plusieurs grands domaines des mathématiques, notamment pour nous l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie plane. Mais avant de commencer les explications, une petite question : pourquoi avoir « inventé » de toutes pièces ces nombres complexes ? Les différents ensembles de nombres sont apparus historiquement de façon relativement naturelle pour résoudre des problèmes concrets : les entiers naturels servent tout simplement à compter, les entiers relatifs deviennent nécessaires dès qu'on veut quantifier de façon un peu abstraite des échanges commerciaux, et les rationnels apparaissent dès qu'on cherche à diviser en plusieurs parts une quantité entière. Enfin, les réels permettent de graduer une droite et sont donc utiles pour se repérer (ils apparaissent par ailleurs assez rapidement dans des problèmes de géometrie : diagonale d'un carré ou périmètre d'un cercle). Les complexes, eux, ont été d'abord introduits pour permettre de résoudre des équations, les autres applications n'apparaissant qu'ensuite. En effet, on sait bien par exemple que tout nombre positif possède une racine carrée réelle (autrement dit, l'équation $x^2 = a$ admet une, et même deux, solutions réelles si $a > 0$), mais qu'en est-il pour les nombres négatifs, et notamment pour -1 ? L'ensemble des nombres complexes possède l'étonnante propriété que toute équation polynomiale y admet (au moins) une solution, ce qui le rend « suffisant » pour à peu près toutes les applications algébriques que vous pourrez y faire à votre niveau.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise du calcul algébrique sur les nombres complexes : résolution d'équations, utilisation alternée de la forme algébrique et de la forme exponentielle dans la résolution de problèmes.
- compréhension du lien entre trigonométrie et nombres complexes via la notation d'exponentielle complexe.

- résolution de problèmes géométriques à l'aide des nombres complexes (interprétation d'angles et de distances à l'aide de modules et d'arguments, notamment), connaissance des isométries et similitudes du plan.

1 Structure de l'ensemble des nombres complexes.

1.1 Définitions.

Définition 1. L'ensemble des **nombres complexes**, usuellement noté $\mathbb{C}$, est constitué de tous les couples de réels (a, b). Il est muni des deux opérations élémentaires suivantes :

- la **somme** de de deux nombres complexes est définie par $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- le **produit** de ces mêmes nombres complexes est défini par $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

En pratique, on note le couple $(1, 0)$ sous la forme 1 (et plus généralement tout réel a est identifié au nombre complexe $(a, 0)$, et on note i le nombre $(0, 1)$. Tout nombre complexe peut alors s'écrire sous la forme $z = a + ib$ (appelée **forme algébrique** du nombre z).

Remarque 1. Les définitions des opérations s'interprètent plus facilement à l'aide des notations précédentes : les propriétés des opérations qu'on va énoncer juste après font qu'on va calculer « classiquement » avec les nombres complexes (développements des produits notamment), avec la convention que $i^2 = -1$.

Théorème 1. Propriétés des opérations usuelles sur les nombres complexes.

- La somme de nombres complexes est commutative : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z + z' = z' + z$.
- La somme de nombres complexes est associative : $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$, $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
- Le nombre complexe $0 + i0$ (désormais plus simplement noté 0) est un élément neutre pour la somme : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = 0 + z = z$.
- Tout nombre complexe z admet un opposé noté $-z$, c'est-à-dire un élément vérifiant $z + (-z) = 0$.
- Le produit de nombres complexes est lui aussi commutatif et associatif, il admet comme élément neutre le nombre complexe $1 + i0$ (qui sera noté plus simplement 1).
- Tout nombre comple non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}, c'est-à-dire un nombre vérifiant $z \times z^{-1} = 1$.
- Le produit est distributif par rapport à la somme : $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Démonstration.

- Les propriétés de l'addition découlent immédiatement de celles de l'addition sur les réels. L'opposé de $z = a + ib$ sera bien sûr le nombre $-z = -a + i(-b)$.
- En posant $z = a + ib$, $z' = c + di$ et $z'' = e + fi$ trois nombres complexes, on a $zz' = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) = (c+id)(a+ib)$, donc le produit est bien commutatif. De même $(zz')z'' = ((ac-bd)+i(ad+bc))(e+if) = ace-bde-adf-bcf+i(acf-bdf+ade+bce)$ et $z(z'z'') = (a+ib)((ce-df)+i(cf+de)) = ace-adf-bcf-bde+i(acf+ade+bce-bdf)$. Les deux résultats étant les mêmes, le produit est bien associatif.
- L'inverse du nombre $z = a + ib$ est le complexe $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$. En effet, $(a - ib)(a + ib) = a^2 - b^2$.

- La distributivité est à nouveau un calcul sans difficulté : $z(z'+z'') = (a+ib)(c+e+i(d+f)) = a(c+e)-b(d+f)+i(a(d+f)+b(c+e)) = ac-bd+i(ad+bc)+ae-bf+i(af+be) = zz'+zz''$. $\square$

Remarque 2. On pourrait résumer tout le théorème en une seule phrase : « $\mathbb{C}$ est un corps commutatif » mais on attendra le prochain chapitre pour avoir le droit de faire ça.

Définition 2. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le réel a est appelé **partie réelle** de z, et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z, et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 3. Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**, et on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Définition 4. À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point M du plan (muni d'un repère orthonormé) de coordonnées (a, b). Le point M est appelé **image** du nombre complexe z, et le nombre z **affixe** du point M. L'ensemble des points du plan muni de cette identification est souvent désigné sous la dénomination de « plan complexe ». Les deux axes de ce plan seront souvent nommés « axe réel » et « axe imaginaire » pour des raisons évidentes.

1.2 Conjugaison.

On peut définir sur les nombres complexes une autre opération qui sera la première pour laquelle nous aurons une interprétation géométrique simple :

Définition 5. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le nombre $a - ib$.

Proposition 1. Propriétés de la conjugaison.

- La conjugaison est compatible avec la somme : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- La conjugaison est compatible avec le produit : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
- La conjugaison est involutive : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$, on a $\overline{z+z'} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a-ib+c-id = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{ac-bd+i(ad+bc)} = ac-bd-i(ad+bc)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a-ib)(c-id) = ac-bd-i(ad+bc)$. La dernière propriété est tellement évidente que je vous épargne le calcul. $\square$

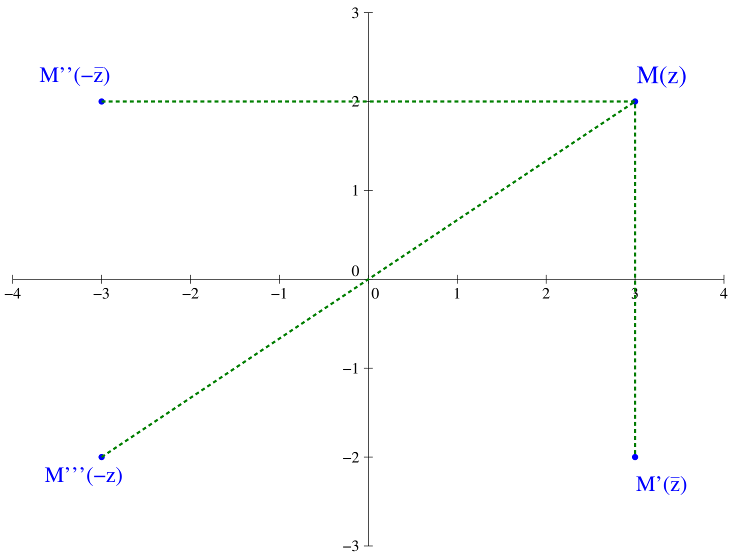
Proposition 2. Pour tout nombre complexe z, on a $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. Par conséquent, z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration. Comme $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, on a bien $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$, et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. $\square$

Proposition 3. Soit z un nombre complexe et M son image dans un repère orthonormal du plan. Alors l'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe réel (axe des abscisses dans le plan complexe).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que le symétrique de $M(a, b)$ par rapport à l'axe des abscisses est $M'(a, -b)$. $\square$

Remarque 3. Le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire (axe des ordonnées) a pour affixe $-\overline{z}$. Le symétrique de M par rapport à l'origine du repère a pour affixe $-z$.



1.3 Module.

Définition 6. Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$, noté $|z|$, est le réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 4. Pour un nombre réel, le module coincide avec la valeur absolue, ce qui explique que la notation soit la même (on peut d'ailleurs en donner une définition commune à l'aide de la notion de distance que nous allons rappeler ci-dessous).

Proposition 4. Règles de calcul sur les modules :

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = |z||z'|$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}|$.

Démonstration. En effet, $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = |z|.|z'|$. Le quotient se fait de la même façon. Le fait que $|z| = |\overline{z}|$ découle immédiatement de la définition. $\square$

Remarque 5. Si M est l'image de z dans un repère orthonormé d'origine O, le module de z représente tout simplement la distance OM. Plus généralement, la distance dans le plan complexe entre les images M et M' des nombres complexes z et z' peut se calculer de la façon suivante : $MM' = |z - z'|$.

Proposition 5. Soit z un nombre complexe, alors $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration. C'est évident en utilisant la remarque précédente, puisque $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ représentent les distances de O aux projetés orthogonaux de M sur les axes du repère. C'est d'ailleurs tout aussi évident à partir de la définition du module sous sa forme $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. □

Théorème 2. Inégalité triangulaire.
Soient z et z' deux nombres complexes, alors $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. De plus, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $z = \lambda z'$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) ou $z' = 0$.

Démonstration. Commençons par l'inégalité de droite : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\text{Re}(\overline{z}z') \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2$. Tous ces modules étant des réels positifs, l'inégalité triangulaire en découle par passage à la racine carrée.

L'inégalité de gauche est en fait presque la même que celle de droite. En effet, appliquons cette dernière à z' et $z - z'$, on obtient $|z| \leqslant |z'| + |z - z'|$, donc $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$. En inversant le rôle de z et z', on a de même $|z'| - |z| \leqslant |z' - z|$, ce qui permet d'ajouter la valeur absolue au membre de gauche. Ne reste plus qu'à remplacer z en $-z$ pour la forme de l'énoncé.

Enfin, d'après la démonstration faite, l'égalité dans l'inégalité de droite se produit exactement quand $\text{Re}(\overline{z}z') = |zz'|$, ce qui ne se produit que si le nombre complexe $\overline{z}z'$ est en fait un réel positif. Dans la mesure où $\overline{z}z' = \dfrac{z'|z|^2}{z}$ (dans le cas où $z \neq 0$), cela revient à dire que $\dfrac{z'}{z}$ est un réel positif, ce qui correspond bien à la condition donnée dans l'énoncé du théorème. □

Remarque 6. On peut facilement généraliser l'inégalité à plus de deux nombres complexes : $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$. Cette inégalité triangulaire généralisée se prouve par récurrence forte : elles est vraie pour $n = 1$ (c'est évident !) et pour $n = 2$ comme on vient de le prouver. Supposons alors l'inégalité vérifiée pour une somme de n nombres complexes et écrivons $\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = |a + z_{n+1}|$ en posant $a = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|$. On applique alors successivement l'hypothèse de récurrence au rang 2 (d'où la nécessité de faire une récurrence forte) puis au rang n pour obtenir $\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| \leqslant |a| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$.

Proposition 6. Équations complexes de cercles.
L'équation $|z - a| = r$ dans le plan complexe, avec $r \in \mathbb{R}^+$, est l'équation du cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.

Exemple : On peut passer de ce type d'équation de cercle à une équation cartésienne (faisant intervenir les deux coordonnées sous forme de parties réelle et imaginaire des nombres complexes manipulés) par un calcul élémentaire. Faisons-le sur un exemple, celui du cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon 2. En posant $z = a + ib$, on peut écrire l'équation du cercle sous la forme $|z - (1 + i)|^2 = 4$, soit $|(a - 1) + i(b - 1)|^2 = 4$, donc $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 4$. On reconnait bien là une équation de cercle, qu'on peut développer entièrement pour la mettre sous la forme $a^2 + b^2 - 2a - 2b - 2 = 0$. On doit bien entendu être capable de déterminer rapidement les caractéristiques du cercle à partir de n'importe laquelle de ces différentes équations.

2 Complexes et trigonométrie.

2.1 Nombres complexes de module 1.

Définition 7. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 (ou nombres complexes **unimodulaires**). Cet ensemble est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration. Si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, on a $|zz'| = |z||z'| = 1$, et $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = 1$, donc $\mathbb{U}$ est bien stable par produit et inversion. □

Remarque 7. Le produit complexe, restreint à $\mathbb{U}$, est une opération interne (on ne peut pas obtenir autre choses que des nombres complexes de module 1 en effectuant des produits ou des divisions à partir de nombres de module 1), et conserve les propriétés théoriques fondamentales du produit dans $\mathbb{C}$ (associativité, commutativité, élément neutre égal à 1). Ces propriétés expliquent en partie le rôle fondamental de l'ensemble $\mathbb{U}$, qui forme ce qu'on appelle en algèbre théorique un **groupe commutatif**.

Proposition 7. En notant $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (où $\theta \in \mathbb{R}$), tout élément de $\mathbb{U}$ peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$, l'angle θ étant unique module 2π.

Démonstration. Comme $|z| = 1$, le point $M(a,b)$ image de z dans le plan complexe appartient au cercle trigonométrique. On peut donc écrire ses coordonnées sous la forme $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$, où θ est un angle défini à 2π près, et $z = a + ib = e^{i\theta}$. □

Remarque 8. La notation exponentielle complexe est à première vue totalement arbitraire, et semble n'avoir aucun rapport avec les exponentielles de nombres réels. Les régles de calcul rappelées dans la propriété ci-dessous suffiraient à justifier cette notation puisque ce sont les mêmes que celles des exponentielles réelles, mais le lien est en fait plus profond : il existe de « meilleures » définitions de la fonction exponentielle qui sont cohérentes avec toutes les formes que nous avons vues jusqu'ici, réelle ou complexe (par exemple à base de séries entières que vous étudierez l'an prochain).

Proposition 8. Règles de calcul sur les exponentielles complexes.

- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Démonstration. La première propriété découle imédiatement des formules d'addition pour le cos et le sin : $e^{i\theta}e^{i\theta'} = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$. La troisième propriété découle bien sûr de cette première formule par récurrence (pour les entiers n positifs) et en combinant avec la formule de l'inverse pour les entiers négatifs. Cet inverse est évident à obtenir via la première formule : $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$. On en déduit d'ailleurs tout aussi classiquement la deuxième formule de la proposition. Enfin, le calcul du conjugué est immédiat si on se rappelle que le cosinus est une fonction paire, et le sinus une fonction impaire. □

2.2 Argument d'un nombre complexe.

Proposition 9. Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$, où $r = |z| \in \mathbb{R}^+$, et θ est un réel unique à 2π près. Cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Démonstration. C'est une application immédiate de la propriété similaire du paragraphe précedent sur les nombres complexes de module 1 : $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$, et le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ ayant pour module 1, il peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$. □

Définition 8. Le réel θ est appelé **argument** du nombre complexe z, et noté $\arg(z)$ (il n'est pas unique). L'unique valeur de θ appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est l'**argument principal** de z, souvent noté $\mathrm{Arg}(z)$.

Remarque 9. Le nombre complexe 0 est donc le seul à ne pas posséder d'argument.

Proposition 10. Règles de calcul sur les arguments :

- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}$, $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}$, $\arg\left(\dfrac{z}{z}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

Démonstration. C'est en fait une simple redite des propriétés vues au paragraphe précédent. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a les formes exponentielles suivantes : $-z = r(-e^{i\theta}) = r(-\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = re^{i(\theta+\pi)}$; $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$; $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'=rr'e^{i(\theta+\theta')}}$, et de même pour le quotient. □

Remarque 10. L'argument d'un nombre complexe représente l'angle entre l'axe réel et la demi-droite $[OM)$ (M désignant bien sûr l'image du nombre complexe) dans le plan complexe. En tant que tel, il est fondamental dans tout ce qui est interprétation d'angles en termes de nombres complexes. Il est en particulier indispensable de connaitre cette propriété : si $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont trois points du plan complexe, alors l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égal à $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$. En particulier, les trois points sont alignés si et seulement si le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel, et les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si ce même quotient est imaginaire pur.

2.3 Applications du calcul complexe en trigonométrie.

Proposition 11. Formules d'Euler.
Pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration. C'est en fait une simple redite pour le cas de $e^{i\theta}$ des formules $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ $\square$

Proposition 12. Formule de Moivre.
Pour tout réel θ et tout entier naturel n, $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Démonstration. Cette formule est tout bêtement équivalente à $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$. $\square$

Plus que les formules elles-mêmes, ce sont quelques calculs classiques les utilisant qu'il faut connaitre :

Exemple 1 : Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
On a vu dans le chapitre de trigonométrie des formules de duplication et de triplication du cosinus. Les formules de Moivre et d'Euler permettent plus généralement de calculer $\cos(n\theta)$ comme un polynome en $\cos(\theta)$ (et de même pour le sinus, au détail près qu'un facteur $\cos(\theta)$ restera présent si n est un entier pair) via la formule du binome de Newton (que nous énoncerons enfin dans le prochain chapitre de cours consacré au dénombrement ; en attendant, on peut toujours calculer les coefficients de ce genre de développement en se servant du triangle de Pascal). Par exemple :

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}(e^{i5\theta}) \\
&= \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5) \\
&= \mathrm{Re}(\cos^5(\theta) + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) \\
&\quad +5\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i\sin^5(\theta)) \\
&= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)(1-\cos^2(\theta)) + 5\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2 \\
&= 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Exemple 2 : Linéarisation de puissances du cosinus ou du sinus.
Dans l'autre sens, on peut facilement linéariser les puissances du cosinus (et du sinus), c'est-à-dire les exprimer en fonction des cosinus des multiples de θ, par exemple :

$$\begin{aligned}
\sin^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
&= \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

On peut appliquer ce type de calcul par exemple dans le cadre d'un calcul d'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\,dx = \left[\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$.

Exemple 3 : Factorisation par l'angle moitié.
Les expressions du type $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$ peuvent se mettre facilement sous forme exponentielle en les factorisant par une exponentielle complexe d'argument $\dfrac{\theta}{2}$: $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
En supposant $\theta \in [0, \pi]$, le nombre $1 + e^{i\theta}$ a donc pour module $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et pour argument $\dfrac{\theta}{2}$.

Un exemple d'application à un (superbe) calcul de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}}-e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}})}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\times(-2i\sin(\frac{(n+1)\theta}{2}))}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}\right)\\
&= \frac{\cos(\frac{n\theta}{2})\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}
\end{aligned}$$

Remarquons pour finir que c'est exactement le même calcul qui permet de retrouver rapidement les formules de transformations somme-produit trigonométriques que vous avez oublié pendant les vacances : par exemple $\cos(p)+\cos(q)=\mathrm{Re}(e^{ip}+e^{iq})=\mathrm{Re}(e^{\frac{i(p+q)}{2}}(e^{\frac{i(p-q)}{2}}+e^{\frac{i(q-p)}{2}}))$ $=\mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{\frac{i(p+q)}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$. On peut naturellement retrouver les autres formules de la même façon.

Exemple 4 : Un calcul trigonométrique moins direct faisant intervenir les exponentielles complexes est la transformation des expressions de la forme $a\cos(x)+b\sin(x)$ en $A\cos(x+\varphi)$ (calculs très fréquents en physique, les nombres A et φ étant alors appelés **amplitude** et **déphasage** de la fonction trigonométrique $x\mapsto a\cos(x)+b\sin(x)$). Une façon rapide de faire est d'interpréter la somme de cosinus et de sinus comme la partie réelle d'un produit de nombres complexes. Par exemple, $2\cos(x)-\sin(x)=\mathrm{Re}((2+i)(\cos(x)+i\sin(x)))=\mathrm{Re}((2+i)e^{ix})$. Il ne reste plus qu'à mettre le nombre $2+i$ sous forme exponentielle : $|2+i|=\sqrt{5}$, donc $2+i=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}i\right)$. Léger souci, on ne reconnait pas d'angle remarquable dans l'argument de ce qui se trouve dans la parenthèse. Pas grave, on va poser $\theta=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ qui conviendra très bien (en effet, il appartient à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et sa tangente est égale à celle de l'argument recherché). On trouve alors $2+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$, puis $2\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{5}\,\mathrm{Re}(e^{i(x+\theta)}=\sqrt{5}\cos(x+\theta)$. Autrement dit, l'amplitude de notre fonction est de $\sqrt{5}$ et son déphasage de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

2.4 Exponentielle complexe.

On peut en fait généraliser la définition de l'exponentielle à tout nombre complexe.

Définition 9. Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, son exponentielle est le nombre $e^z=e^ae^{ib}$.

Remarque 11. Cette définition généralise à la fois celle de l'exponentielle réelle et celle donnée pour les imaginaires purs. On a en fait $\arg(e^z)=\mathrm{Im}(z)$ et $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Proposition 13. La fonction exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, et vérifie la propriété $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$.

Démonstration. La périodicité découle simplement du fait que $e^{2i\pi}=1$, et l'équation fonctionnelle est issue de celle vérifiée par les deux exponentielles déjà définies précédemment. □

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i$.

Il s'agit en fait simplement de mettre le nombre sous forme exponentielle puis d'identifier module et argument des deux membres. On calcule très facilement $1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, et notre équation peut donc se mettre, en posant $z = x + iy$, sous la forme $e^x e^{iy} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, ce qui implique simplement $x = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2)$, et $y \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Les solutions de l'équation sont donc données par $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3 Équations complexes.

3.1 Équations du second degré à coefficients complexes.

Théorème 3. Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{C}^2$, on commence par calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ puis :

- si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, où δ est un nombre complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel : en divisant l'équation par a puis en mettant sous forme canonique, on obtient $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Si Δ est nul, il n'y a qu'une seule solution égale à $\frac{-b}{2a}$. Sinon, on a $z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}$, ce qui donne les deux solutions annoncées. □

Méthode : Pour obtenir une racine carrée d'un nombre complexe (ce qui est nécessaire ici pour déterminer δ à partir de Δ), on cherche tout simplement la valeur de la racine carrée sous forme algébrique : en posant $\delta = a+ib$, on calcule $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, et l'égalité $\delta^2 = \Delta$ se traduit donc par le système $\left\{\begin{array}{rcll} a^2 - b^2 & = & \text{Re}(\Delta) & (1) \\ 2ab & = & \text{Im}(\Delta) & (2) \end{array}\right.$. Pour simplifier la résolution de ce système, on ajoutera systématiquement l'« équation aux modules » $|\delta|^2 = |\Delta|$, qui s'écrira sous la forme $a^2 + b^2 = |\Delta|$ (3). On effectue alors les combinaisons d'équations (1) + (3) et (3) − (1) pour obtenir les valeurs de a^2 et b^2 et donc, au signe près, celles de a et b. L'équation (2) sert alors simplement à bien choisir les signes des deux inconnues (deux possibilités cohérentes, ce qui est normal puisque deux valeurs de δ sont possibles, opposées l'une de l'autre).

Exemple : On veut résoudre l'équation $z^2 - iz - i - 1 = 0$. On calcule donc le discriminant $\Delta = (-i)^2 - 4(-i - 1) = -1 + 4i + 4 = 3 + 4i$. Cherchons donc $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = 3 + 4i$. Comme $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, on obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$. On ajoute la condition sur le module $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. En additionant et soustrayant la première et la dernière équation, on a $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$, et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme par ailleurs $2ab > 0$, a et b doivent être de même signe, ce qui laisse les possibilités $\delta_1 = 2+i$ et $\delta_2 = -2-i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \frac{i + 2 + i}{2} = 1 + i$, et $z_2 = \frac{i - 2 - i}{2} = -1$.

Proposition 14. Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration. On peut s'en sortir directement avec les formules donnant les solutions : $z_1 + z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a} + \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} - \dfrac{b}{a}$, et $z_1 z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}\dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. □

Terminons ce paragraphe en citant, sans le démontrer, un théorème extrêmement fondamental sur les équations complexes :

Théorème 4. D'Alembert-Gauss.
Toute équation polynomiale admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Remarque 12. Ce théorème porte également le nom pompeux de théorème fondamental de l'algèbre. Il peut être précisé, le nombre de racines d'un polynome de degré n étant toujours égal à n si on les compte avec multiplicité. Nous yreviendrons dans un chapitre ultérieur spécifiquement consacré aux polynômes.

3.2 Racines n-èmes d'un nombre complexe.

Définition 10. Les **racines n-èmes** d'un nombre complexe a sont toutes les solutions de l'équation $z^n = a$.

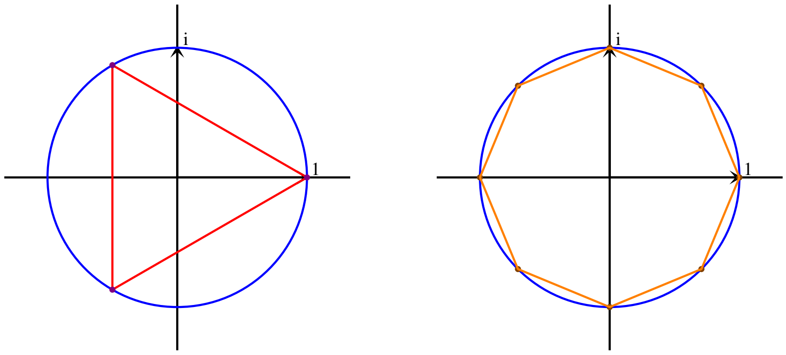
Remarque 13. Cette équation admet (presque, le seul cas particulier étant $z = 0$) toujours plusieurs solutions, qu'il est hors de question de noter sous la forme $\sqrt[n]{a}$ ou même $a^{\frac{1}{n}}$. En effet, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun ordre naturel sur $\mathbb{C}$, et donc aucune façon évidente de distinguer l'une de ces solutions pour l'identifier de façon unique à l'aide de ces notations. En particulier, comme nous l'avons d'ailleurs déjà fait dans le paragraphe précédent concernant les équations du second degré, on ne parlera jamais de **la** racine carrée d'un nombre complexe, mais bien d'**une** racine carrée, les deux valeurs possibles jouant systématiquement un rôle interchangeable.

Définition 11. On appelle **racines n-èmes de l'unité** les racines n-èmes du nombre $a = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

Théorème 5. Les racines n-èmes de l'unité sont les n nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration. En effet, soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe (non nul) mis sous forme exponentielle. En séparant module et argument, l'équation $z^n = 1$ se traduit par les deux conditions $r^n = 1$ et $n\theta \equiv 0[2\pi]$. Or, r étant désormais un réel positif (c'est un module !), la seule possibilité est $r = 1$, et on a par ailleurs $\theta \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n}\right]$, ce qui donne bien, les n valeurs annoncées (si on continue à faire augmenter la valeur de k on retombe sur les mêmes valeurs puisque l'argument aura augmenté de 2π entre la valeur correspondant à $k = 0$ et celle correspondant à $k = n$). □

Proposition 15. Les images dans le plan complexe des racines n-èmes de l'unité y forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (voire ci-dessous l'illustration pour $n = 3$ et $n = 8$).



Définition 12. On note habituellement j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines cubiques de l'unité sont donc les nombres 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}$.

Remarque 14. Plus généralement, on peut en fait remarquer qu'en notant $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, l'ensemble des racines n-èmes de l'unité est constitué des nombres de la forme ω^k, pour k variant entre 0 et $n-1$ (ω est appelée racine n-ème primitive de l'unité, car on peut obtenir toutes les autres en prenant les puissances de celle-ci). En particulier, il est stable par produit, ce qui en fait techniquement ce qu'on appelle un sous-groupe de $\mathbb{U}$ (il est bien entendu toujours inclus dans $\mathbb{U}$, d'où la notation employée pour le désigner).

Proposition 16. La somme de toutes les racines n-èmes de l'unité est toujours nulle.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul de somme géométrique : en posant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, il s'agit de calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ puisque par définition $\omega^n = 1$. En fait, on vient de démontrer que le polygone régulier évoqué dans la propriété précédente est centré en 0. $\square$

Proposition 17. Soit $a = re^{i\theta}$ un nombre complexe mis sous forme exponentielle. Ses racines n-èmes sont les nombres de la forme $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration. C'est exactement le même calcul que pour les racines de l'unité : en posant $z = r'e^{i\theta'}$, l'équation $z^n = a$ se traduit, en séparant module et argument, par les conditions $r'^n = r$ et $n\theta' \equiv \theta[2\pi]$, dont découlent les formules annoncées. $\square$

Exemple : On cherche à déterminer les racines cubiques de $a = 2+2i$. Commençons par écrire a sous forme exponentielle : $|a| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. En notant $z = re^{i\theta}$, l'équation $z^3 = a$ se ramène à $r^3e^{3i\theta} = a$, c'est-à-dire aux deux conditions $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, soit $r = \sqrt{2}$, et $\theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Autrement dit, les trois racines cubiques sont $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$ (seule la deuxième de ces trois racines cubiques peut s'écrire aisément sous forme algébrique).

Remarque 15. Les propriétés des racines n-èmes de l'unité se généralisent à toutes les racines n-èmes. En particulier, les racines n-ème d'un nombre complexe quelconque ont des images formant toujours un polgone régulier centré en 0 dans le plan complexe (mais insscrit, non plus dans le cercle trigonométrique, mais dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$, où r est le module du nombre complexe dont on a calculé les racines).

4 Nombres complexes et géometrie.

4.1 Affixes d'objets géométriques du plan.

Définition 13. L'**affixe** complexe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. Plus généralement, le vecteur $\overrightarrow{u}(a,b)$ du plan aura pour affixe complexe $z_{\overrightarrow{u}} = a + ib$.

Proposition 18. Propriétés des affixes vectorielles :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel λ, $z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.

Proposition 19. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe complexe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$. Le centre de gravité G du triangle ABC a pour affixe complexe $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

4.2 Produit scalaire et déterminant.

Proposition 20. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, alors $\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}})$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Im}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}})$.

Démonstration. Si $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$, alors $z_{\vec{u}} = a + ib$ et $z_{\vec{v}} = a' + ib'$, donc $\mathrm{Re}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}}) = aa' + bb' = \vec{u}.\vec{v}$. De même, $\mathrm{Im}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}}) = ab' - a'b = \det(\vec{u},\vec{v})$. □

Remarque 16. En particulier, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}} \in i\mathbb{R}$, ou plus simplement si $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$. Ils sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$. Ces propriétés correspondent exactement à celles annoncées lors de la définition de l'argument d'un nombre complexe : trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, et le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

4.3 Transformations du plan.

Une transformation du plan est tout simplement une application bijective définie sur l'ensemble des points du plan, ayant la plupart du temps une interprétation géométrique simple. Dans le cadre de ce chapitre, nous verrons de telles applications sous la forme de fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (on identifiera donc un point avec son affixe complexe quand on parlera de ces transformations). Vous avez déjà étudié depuis plusieurs années de telles transformations géométriques : translations, rotations, symétries font partie de cette catégorie. Le but de cette dernière partie de chapitre est de classifier rigoureusement ces transformations, en commençant par définir des catégories de transformations selon les caractéristiques géométriques qu'elles conservent.

Définition 14. Une **isométrie** du plan est une transformation du plan qui conserve les distances : quels que soient les points M et N du plan, en notant M' et N' leurs images par la transformation, on aura toujours $M'N' = MN$.

Une **similitude** du plan de rapport $k \in \mathbb{R}^{+*}$ est une transformation du plan qui multiplie toutes les distances par le même réel k. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on aura donc toujours $M'N' = k \times MN$.

Une simitude (ou une isométrie) est **directe** si elle conserve de plus les angles orientés, **indirecte** si elle transforme un angle orienté en angle opposé.

Remarque 17. Il est sous-entendu dans la dernière partie de la définition qu'une similitude conserve nécessairement les angles au signe près, propriété que nous ne démontrerons pas, mais qui est bien sûr vraie.

Exemples : parmi les choses que vous avez déjà étudiées, toutes les translations et les rotations sont des isométries directes. Les réflexions (symétries par rapport à des droites) sont des isométries indirectes. La notion de symétrie centrale (par rapport à un point) ne sera pas évoquée puisqu'il s'agit en fait d'une rotation (d'angle π). Enfin, les homothéties sont des exemples de similitudes directes du plan.

Proposition 21. Expression complexe des transformations usuelles.

- La translation de vecteur $\vec{u}$ a pour équation complexe $z \mapsto z + z_{\vec{u}}$.
- La rotation d'angle θ et de centre $A(z_A)$ a pour équation complexe $z \mapsto e^{i\theta}(z - z_A) + z_A$.
- L'homothétie de rapport k et de centre $A(z_A)$ a pour équation complexe $z \mapsto k(z - z_A) + z_A$.
- La réflexion par rapport à l'axe réel a pour équation complexe $z \mapsto \overline{z}$.

Démonstration.

- En notant $M(z)$ et $M'(z')$ l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$, on a par définition $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, donc $z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée.
- Avec les mêmes notations que pour la translation, on peut caractériser l'image d'une rotation par le fait que $AM = AM'$, et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta$. Autrement dit, le nombre complexe $\dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}$ a pour module 1 (le numérateur et le dénominateur ont pour module respectif AM' et AM), et pour argument θ. On peut donc écrire $\dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = e^{i\theta}$, soit $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.
- Même principe que pour la rotation, on aura cette fois-ci $\dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = k$ (le rapport des modules vaut k, et l'angle est nul), dont on déduit aisément la formule.
- On a déjà vu la caractérisation géométrique de la conjugaison.

$\square$

Exemple : La rotation de centre $A(i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ avec $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $(z - i) + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$.

Théorème 6. Caractérisation complexe des isométries et des similitudes.

- Les isométries directes du plan ont toutes une expression complexe de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Les seules isométries directes du plan sont les translations et les rotations.
- Les similitudes directes du plan ont toutes une expression complexe de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Une telle similitude est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre. On parlera alors de **la** similitude de centre A, de rapport k (celui de l'homothétie) et d'angle θ (celui de la rotation).
- Les isométries indirectes du plan ont toutes une expression complexe de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$.
- Les similitudes indirectes du plan ont toutes une expression complexe de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration. La démonstration est faisable par des moyens élémentaires, mais assez rébarbative, je vous en fais grâce. $\square$

Méthode : Pour reconnaitre une similitude directe à partir de son équation $z' = az + b$, on peut procéder de la façon suivante :

- Si $a = 1$, on reconnait immédiatement une translation, dont le vecteur a pour affixe b.
- Si $a \neq 1$, l'application $z \mapsto az+b$ admet un unique point fixe ω, dont on notera Ω l'image dans le plan complexe. En notant $k = |a|$ et $\theta = \arg(a)$, la transformation est alors la similitude directe de centre Ω, de rapport k, et d'angle θ.

Exemple : Considérons l'application $f : z \mapsto (1+i)z - 2i$. On recherche le point fixe de l'application en résolvant l'équation $z = (1 + i)z - 2i$, ce qui donne $iz = 2i$, soit $z = 2$. Comme par ailleurs $|1 + i| = \sqrt{2}$, et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, l'application f est donc la similitude directe de centre $A(2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exemple : On peut également définir une similitude directe à l'aide de l'image de certains points. En effet, si (M, N) et (M', N') sont deux couples de points distincts du plan, il existe toujours une unique similitude directe f telle que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$.

Considérons par exemple les quatre points du plan (et leurs affixes complexes) $A(2 - i)$, $B(-1 + i)$, $A'(3 + 7i)$ et $B'(5 - 3i)$, et cherchons à déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe f vérifiant $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Le théorème de classification des similitudes du plan nous assure que f a une expression complexe de la forme $f(z) = az + b$. Appliquée aux affixes des deux points dont on connait l'image, cette équation nous permet d'obtenir le système d'équations $\left\{\begin{array}{lll} a(2-i)+b & = & 3+7i \\ a(-1+i)+b & = & 5-3i \end{array}\right.$. En soustrayant ces deux équations, on déduit immédiatement que $(3 - 2i)a = -2 + 10i$, donc $a = \frac{-2 + 10i}{3 - 2i} = \frac{(-2 + 10i)(3 + 2i))}{3^2 + 2^2} = \frac{-26 + 26i}{13} = -2 + 2i$. On calcule ensuite facilement $b = 3 + 7i - (-2 + 2i)(2 - i) = 5 + i$. On procède ensuite comme d'habitude : le rapport de la similitude est égal à $|a| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ puis, après avoir écrit a sous la forme $a = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, on reconnait comme angle de la simitude $\arg(a) = \frac{3\pi}{4}$. Il ne reste plus qu'à trouver l'affixe du centre de la similitude en résolvant l'équation $f(z) = z$, soit $(-2+2i)z+5+i = z$, ce qui implique $z = \frac{-5-i}{-3+2i} = \frac{(-5-i)(-3-2i)}{13} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$. L'application f est donc la similitude directe de centre $C(1+i)$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.