

Programme de colle n° 28

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 25/05 au 29/05 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 23 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.
- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (deux versions, l'une complexe, l'autre réelle, aucune n'a été démontrée), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X - a$ puis évaluation pour $X = a$, ou calcul de $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G = (X - a)^2 F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite après avoir multiplié par X ; changement de variable pour se ramener à un pôle nul dans le cas d'un pôle multiple, éventuellement après avoir soustrait la partie polaire correspondant à d'autres pôles ; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2 + aX + b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).
- Applications, notamment à des calculs d'intégrales ou de sommes télescopiques.

Chapitre 24 : Groupe symétrique, déterminants.

- Groupe symétrique \mathfrak{S}_n : vocabulaire (transpositions, cycles, support et longueur d'un cycle), décomposition en produit de cycles à supports disjoints (on n'a fait qu'une ébauche de preuve, qui n'est pas au programme, mais les élèves doivent être capables de déterminer rapidement la décomposition d'une permutation donnée), et en produit de transpositions.
- Nombre d'inversions d'une transposition, signature, la signature est un morphisme de \mathfrak{S}_n vers $\{-1, 1\}$, groupe alterné \mathcal{A}_n (aucune connaissance autre que la définition).
- Déterminants :
 - rappels sur le déterminant de deux vecteurs du plan et de trois vecteurs de l'espace : définition géométrique (dans le plan), caractérisation de la colinéarité/coplanarité, inter-

- prétation comme aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède, formule dans une base orthonormale, propriétés théoriques (multilinéarité, antisymétrie, alternance)
- applications multi-linéaires, formes n -linéaires sur \mathbb{R}^n , formes symétriques, antisymétriques, alternées, **équivalence entre antisymétrie et alternance, l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur un ev de dimension n est un ev de dimension 1** (on doit être capable d'expliquer le calcul menant à la formule explicite du déterminant dans une base donnée en fonction des coordonnées des vecteurs dans cette base)
 - déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, noté $\det_{\mathcal{B}}$, caractérisation des bases comme familles de déterminant non nul
 - déterminant d'une matrice carrée : définition, caractérisation de l'inversibilité, propriétés élémentaires $\det(M^T) = \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, techniques de calcul (effet des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne), mineurs, cofacteurs et comatrice, formule d'inversion $M(\text{Com}(M))^T = \det(M)I_n$, exemples de calcul de déterminants par récurrence (on a en particulier traité le cas du **déterminant de Vandermonde** en cours, qui peut être posé en question de cours).

Prévisions pour la semaine prochaine : déterminants, sûrement un peu de variables aléatoires. La dernière semaine de colle n'aura pas de programme spécifique, on pourra poser ce qu'on veut, en mode oral blanc.