Programme de colle n$^{\text{o}}$ 25

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 17/04 au 30/04 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 20 : Séries numériques, familles sommables.

- Vocabulaire général : série de terme général u_n (notée habituellement $\sum u_n$), série convergente, somme et reste d'une série convergente.
- Linéarité de la somme, séries absolument convergentes, implication « série absolument convergente $\Rightarrow$ série convergente » avec contre-exemples pour la réciproque (le contre-exemple standard étant $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$).
- Théorèmes de convergence :
  — une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée
  — théorèmes de comparaison et utilisation d'un équivalent du terme général pour les séries à termes positifs
  — **comparaison série-intégrale** (la notation $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ étant à éviter puisque les intégrales impropres ne seront traitées qu'en deuxième année, on est censés travailler systématiquement avec des limites)
  — critère spécial des séries alternées
- Séries de référence :
  — séries géométriques et géométriques dérivées de raison $q \in \mathbb{C}$ (**calcul de la somme** pour ces deux types de séries)
  — série exponentielle de paramètre x
  — séries de Riemann et critère de convergence de ces séries, équivalent de la somme partielle de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$
  — exemples de calculs de sommes de séries télescopiques
- Familles sommables de réels positifs :
  — définition de la sommabilité (pour tout ce paragraphe et le suivant, on a travaillé dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ en cours, les calculs avec des sommes divergentes et les notations $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$ ou $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$ sont donc autorisées et même conseillées)
  — règles de calcul (sommation par paquets, linéarité, croissance, changement d'indices, théo-

rème de Fubini $\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}$, familles produits $\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \sum_{i\in I} x_i \times \sum_{j\in J} y_j$)

— la valeur $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ (et plus généralement la notation $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ pour un réel $x > 1$) sera supposée connue pour les exercices

- Familles sommables de réels de signe quelconque et de complexes :

— définition de la sommabilité : $\sum_{i\in I} x_i$ est sommable si $\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$

— règles de calcul (liste identique à celle donnée pour les familles de réels positifs, à l'exception bien sûr de la croissance dans le cas de familles complexes)

— exemples de produits de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \times \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$, **utilisation de cette formule pour démontrer la relation** $e^{x+y} = e^x \times e^y$

Prévisions pour la semaine suivante : matrices d'applications linéaires.