Interrogation Écrite n° 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

18 mai 2026

1. Il faut commencer ici par calculer la partie entière en effectuant une division euclidienne :

$$
\begin{array}{rlrrrrrr|l}
 & X^4 & & & & & & & X^2-3X+2 \\
\cline{9-9}
- & (X^4 & - & 3X^3 & + & 2X^2) & & & X^2+3X+7 \\
 & & & 3X^3 & - & 2X^2 & & & \\
 & & - & (3X^3 & - & 9X^2 & + & 6X) & \\
 & & & & & 7X^2 & - & 6X & \\
 & & & & - & (7X^2 & - & 21X \; + \; 14) & \\
 & & & & & & & 15X \; - \; 14 &
\end{array}
$$

On en déduit déjà que $F = X^2 + 3X + 7 + \dfrac{15X - 14}{X^2 - 3X + 2}$. On peut conserver le numérateur initial pour la suite des calculs, ça ne changera rien aux parties polaires obtenues. Le dénominateur de F se factorise en $(X-1)(X-2)$ (racines triviales ici, mais on peut bien sûr calculer un discriminant si on en ressent le besoin), donc $F = X^2+3X+7+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-2}$. En multipliant par $X-1$ avant d'évaluer en 1, on trouve $a = \dfrac{1^4}{1-2} = -1$. De même, en multipliant par $X-2$ avant d'évaluer en 2, on a $b = \dfrac{2^4}{2-1} = 16$. Conclusion : $F = X^2 + 3X + 7 - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{16}{X-2}$.

2. Dans $\mathbb{R}(X)$ il n'y a strictement rien à faire puisque $\dfrac{X+1}{(X^2+1)^2}$ est **déjà** un élément simple. Dans $\mathbb{C}(X)$, on aura une décomposition de la forme $F = \dfrac{a}{X-i} + \dfrac{b}{(X-i)^2} + \dfrac{\overline{a}}{X+i} + \dfrac{\overline{b}}{(X+i)^2}$ (les parties polaires correspondant à nos pôles conjuguées seront conjuguées l'une de l'autre). En multipliant par $(X-i)^2$ avant dévaluer en i, on calcule $b = \dfrac{i+1}{(i+i)^2} = \dfrac{i+1}{-4} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$, donc bien sûr $\overline{b} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$. De plus, si on pose $G = (X-i)^2F = \dfrac{X+1}{(X+i)^2}$, on aura $G' = \dfrac{(X+i)^2 - 2(X+i)(X+1)}{(X+i)^4}$, donc $a = G'(i) = \dfrac{(2i)^2 - 4i(i+1)}{(2i)^4} = \dfrac{-4i}{16} = -\dfrac{1}{4}i$, donc bien sûr $\overline{a} = \dfrac{1}{4}i$. Conclusion : $F = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{i}{X+i} - \dfrac{i}{X-i} + \dfrac{i-1}{(X+i)^2} - \dfrac{i+1}{(X-i)^2}\right)$.

3. Pas de partie entière à calculer, on a une DES théorique de la forme $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b_1}{X-1} + \dfrac{b_2}{(X-1)^2} + \dfrac{b_3}{(X-1)^3}$. Le coefficient le plus simple à calculer est $a = -1$ (en multipliant par X puis en évaluant en 0. Calculons alors $F + \dfrac{1}{X} = \dfrac{X^2+1+(X-1)^3}{X(X-1)^3} = \dfrac{X^3 - 2X^2 + 3X}{X(X-1)^3} = \dfrac{X^2 - 2X + 3}{(X-1)^3}$. On effectue alors le changement de variable $Y = X - 1$, ou $X = Y + 1$ pour obtenir $\dfrac{X^2 - 2X + 3}{(X-1)^3} = \dfrac{(Y+1)^2 - 2(Y+1) + 3}{Y^3} = \dfrac{Y^2+2}{Y^3} = \dfrac{1}{Y} + \dfrac{2}{Y^3} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^3}$.

Il ne reste plus qu'à conclure : $F = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^3}$.

4. Il faut évidemment commencer par effectuer une décomposition en éléments simples. Puisque $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)$, elle sera de la forme $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$. En multipliant par $x-1$ avant d'évaluer en 1, on trouve $c = \frac{4}{(1^2+1)\times(1+1)} = 1$. De même, on calcule $d = -1$ (qu'on peut aussi obtenir en exploitant la parité de la fraction). Une multiplication par x suivie d'un calcul de limite en $+\infty$ donne ensuite $0 = a + c + d$, donc $a = 0$ (bonne nouvelle), et on peut enfin évaluer la fraction en 0 pour trouver la relation $0 = b - c + d$, donc $b = c - d = 2$.

   On peut désormais calculer $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4x^2}{x^4-1}\, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, dx = [2\arctan(x) + \ln(1-x) - \ln(1+x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 \times \frac{\pi}{6} + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{2}{(1+\sqrt{3})^2}\right) = \frac{\pi}{3} + \ln(2) - 2\ln(1+\sqrt{3})$.

5. (a) Manifestement, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{5}$. Ensuite, en commençant un bête arbre (ou en appliquant la formule des probabilités composées si on veut faire pédant), on aura $\mathbb{P}(A_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$, puis $\mathbb{P}(A_3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. En fait, chacune des cinq probabilités vaut $\frac{1}{5}$ (si $k > 5$, la probabilité devient bien sûr nulle), ce qui est logique puisque le concierge se contente de choisir un ordre aléatoire sur les cinq clés, la bonne clé a donc autant de chances de se trouver dans chacune des cinq positions possibles.

   (b) On aura toujours $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{5}$, mais $\mathbb{P}(A_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$, puis $\mathbb{P}(A_3) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$, et plus généralement $\mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{5}$, pour tout entier $k \geq 1$.

   (c) C'est un calcul direct de série géométrique dérivée : $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{(1-\frac{4}{5})^2} = 5$. Il lui faut donc cinq essais en moyenne en étant bourré, alors qu'il n'en faudra que trois en moyenne quand il est sobre (les probabilités étant toutes identiques dans ce cas, il suffit de faire la moyenne des entiers de 1 à 5).

   (d) En notant I l'évènement « le concierge est ivre », on sait d'après les calculs des questions précédentes que $\mathbb{P}_I(A_4) = \frac{4^3}{5^4} = \frac{64}{625}$, et $\mathbb{P}_{\overline{I}}(A_4) = \frac{1}{5}$. On a donc, en appliquant la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}_I(A_4) + \frac{3}{4}\mathbb{P}_{\overline{I}}(A_4) = \frac{16}{625} + \frac{3}{20} = \frac{64+375}{2500} = \frac{439}{2500}$. On en déduit la probabilité recherchée via la formule de Bayes : $\mathbb{P}_{A_4}(I) = \frac{\mathbb{P}(I) \times \mathbb{P}_I(A_4)}{\mathbb{P}(A_4)} = \frac{\frac{64}{2500}}{\frac{439}{2500}} = \frac{64}{439}$.