

Interrogation Écrite n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

18 mai 2026

Énoncé :

1. Calculer la DES de la fraction $F = \frac{X^4}{X^2 - 3X + 2}$.

2. Calculer la DES dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ de $F = \frac{X + 1}{(X^2 + 1)^2}$.

3. Calculer la DES de la fraction $F = \frac{X^2 + 1}{X(X - 1)^3}$.

4. Calculer $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx$.

5. Un concierge possède un trousseau sur lequel se trouvent cinq clés. Une seule de ces clés ouvre la porte de sa loge mais le concierge ne se souvient jamais de laquelle il s'agit, et va donc essayer successivement plusieurs clés de son trousseau. On notera, pour tout entier $k \geq 1$, A_k l'évènement « Le concierge tombe sur la bonne clé au k -ème essai ».

(a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_k)$ lorsque le concierge effectue ses essais sans remise (une clé qui n'a pas fonctionné est donc éliminée du trousseau ; bien sûr, le concierge arrête toujours ses essais une fois qu'il a réussi à ouvrir sa porte).

(b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_k)$ lorsque le concierge effectue ses essais avec remise car il a trop picolé.

(c) Calculer la moyenne $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(A_k)$ du nombre d'essais nécessaire au concierge bourré pour ouvrir sa porte. Comparer à la moyenne obtenue dans le cas où le concierge est sobre (essais sans remise).

(d) Le concierge est ivre un jour sur quatre (de façon complètement aléatoire). Sachant qu'il lui a fallu quatre essais pour trouver la bonne clé hier soir, quelle est la probabilité qu'il ait abusé du mojito auparavant ?