Interrogation Écrite n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

16 décembre 2025

1. (a) Faux. Par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (limite qui se calcule en passant sous forme exponentielle et en exploitant un taux d'accroissement).
   (b) Vrai : si u_n tend vers 0, alors à partir d'un certain rang $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui implique $|u_n^n| < \varepsilon$ pour tous les $\varepsilon < 1$. En fait, u_n^n va tendre vers 0 beaucoup plus vite que u_n.
   (c) Vrai, pour un $\varepsilon < 1$, on aura à partir d'un certain rang $u_n^2 < \varepsilon^2$, ce qui implique $|u_n| < \varepsilon$.
   (d) Faux, il n'est dit nulle part que les suites (u_n) et (v_n) admettaient une limite. Par exemple en posant $u_n = n^2\cos(n)$ et $v_n = (n^2+1)\cos(n)$, le quotient tend vers 1, mais ni (u_n) ni (v_n) n'admettent de limite.
   (e) Faux, on peut facilement créer des contre-exemples, par exemple $u_{2n} = \dfrac{1}{n}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Le plus simple est de faire un bête encadrement : $-\dfrac{n+1}{n^2+1} \leq \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$ (quotient des termes de plus haut degré), le théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} = 0$.
3. C'est une suite arithmético-géométrique. On calcule son point fixe en résolvant l'équation $x = \dfrac{1}{2}x + 1$, qui donne $x = 2$, puis on introduit la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - 2$. On vérifie que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}u_n - 1 = \dfrac{1}{2}v_n$, ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Comme $v_0 = u_0 - 2 = -1$, on en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{1}{2^n}$, puis que $u_n = v_n + 2 = 2 - \dfrac{1}{2^n}$. Passons au calcul de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 2 - \frac{1}{2^k} = 2(n+1) - \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2n + 2 - 2 + \frac{2}{2^{n+1}} = 2n + \frac{1}{2^n}$. On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, puis $\dfrac{S_n}{n} = 2 + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ admet elle aussi une limite égale à 2 (ce qui est normale d'après le théorème de Cesaro).
4. On a bien évidemment envie de faire des produits par les quantités conjuguées : $\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} \times \dfrac{n+\sqrt{n^2-1}}{n^2-(n^2-1)} = -\dfrac{n+\sqrt{n^2-1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = -\dfrac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = -\dfrac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.
   Numérateur et dénominateur de cette fraction ont pour limite 2, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = -1$.
5. On démontrer par récurrence la propriété P_n : $0 < u_n < 1$. La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse. Si on suppose $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}u_n^2 \leq \dfrac{1}{2}u_n > 0$. De plus, $u_n^2 \leq u_n$, donc $\dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}u_n^2 \leq \dfrac{3}{4}u_n < 1$, ce qui prouve l'hérédité de la récurrence. Passons à l'étude de

la monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}u_n^2 - u_n = \frac{1}{4}u_n^2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{4}u_n(u_n - 2)$ qui est négatif puisque $u_n \in]0,1[$. La suite est donc décroissante et minorée par 0, elle converge. Maintenant qu'on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, $u_{n\to+\infty\, n}^{\;\;2} = l$, donc en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite, on a $l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l^2$, soit $\frac{1}{2}l(l-2) = 0$. Comme l ne peut pas être égale à 2 pour une suite majorée par 1, on en déduit que $l = 0$.

6. On écrit donc l'équation caractéristique $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-5i) = 9 - 12i - 4 - 20 + 20i = -15 + 8i$. On vérifie en passant que ce discriminant a un module sympathique : $|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$, tout va bien. On cherche désormais un nombre complexe $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$. On obtient les deux équations habituelles $a^2 - b^2 = -15$ et $2ab = 8$, auxquelles on ajoute tout aussi habituellement l'équation $|\delta|^2 = |\Delta|$, soit $a^2 + b^2 = 17$. En additionnant et soustrayant les équations extrêmes du système obtenu, on obtient $2a^2 = 2$, donc $a = \pm 1$, et $2b^2 = 32$, donc $b = \pm 4$. Comme $2ab > 0$, on peut choisir $\delta = 1 + 4i$, ce qui donne pour notre équation caractéristique les solutions $z_1 = \frac{3 - 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \frac{3 - 2i - 1 - 4i}{2} = 1 - 3i$. On en déduit qu'il existe deux constantes (a priori complexes) A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = A(2+i)^n + B(1-3i)^n$. Les conditions initiales $z_0 = 0$ et $z_1 = 1 + 4i$ se traduisent par $A + B = 0$, donc $B = -A$, et $A(2+i) + B(1-3i) = 1 + 4i$, donc $A(1+4i) = 1 + 4i$. Ah, ça c'est gentil, on a donc simplement $A = 1$ et $B = -1$, d'où $z_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$ pour tout entier naturel n.