Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

16 décembre 2025

Énoncé :

1. Vrai-Faux : déterminer si chacune des affirmations suivantes est correcte (pas de justification demandée, mais toute mauvaise réponse sera sanctionnée) :
   (a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 1$.
   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.
   (c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (d) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (e) Si (u_n) est positive et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors (u_n) est décroissante.

2. Déterminer (si elle existe) la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$, puis calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner enfin la valeur des limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

4. Calculer (si elle existe) la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$.

5. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}u_n^2$. Montrer que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]0,1[$, puis étudier la monotonie de la suite, et montrer enfin qu'elle converge vers une limite l à préciser.

6. Un petit bonus qui vous fera plaisir : déterminer l'expression du terme général de la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = 0$, $z_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+2} = (3-2i)z_{n+1} - (5-5i)z_n$. La méthode est la même que dans le cas réel (en conservant la formule « $\Delta > 0$ » mais avec des raisons de suites géométriques complexes).