Devoir Surveillé n^o 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

29 novembre 2025

Exercice 1

1. Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée $y'' + 2y + y = 0$, qui a pour équation caractéristique $x^2 + 2x + 1 = 0$, soit $(x+1)^2 = 0$. Il y a donc une racine double égale à -1, et les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto (Ax + B)e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour obtenir une solution particulière, on va applioquer la superposition au second membre en l'écrivant sous la forme $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$. On cherche d'abord une solution particulière de l'équation $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^x$ sous la forme $y_p(x) = ae^x$ (inutile d'augmenter le degré du facteur devant l'exponentielle puisque 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique). On aura alors $y_p''(x) = y_p'(x) = y_p(x) = ae^x$, donc y_p est solution si $4ae^x = \frac{1}{2}e^x$, soit $a = \frac{1}{8}$ et donc $y_p(x) = \frac{1}{8}e^x$. On cherche maintenant une deuxième solution à l'équation $y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ sous la forme $y_{p2}(x) = bx^2e^{-x}$ (il faut augmenter le degré de deux devant l'exponentielle, mais on va plutôt « décaler » de deux pour avoir des calculs moins pénibles). On calcule alors $y_{p2}'(x) = 2bxe^{-x} - bx^2e^{-x}$ puis $y_{p2}''(x) = (2b - 2bx - 2bx + bx^2)e^{-x}$. Finalement, en simplifiant toutes les exponentielles qui ne s'annulent jamais, y_{p2} est solution si $2b - 4bx + bx^2 + 4bx - 2bx^2 + bx^2 = -\frac{1}{2}$, soit $b = -\frac{1}{4}$, donc $y_{p2}(x) = -\frac{1}{4}x^2e^{-x}$. Finalement, nos solutions de l'équation de départ sont de la forme $y : x \mapsto \frac{1}{8}e^x + \left(-\frac{1}{4}x^2 + Ax + B\right)e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
2. Partir d'un indice $i+1$ dans la deuxième somme n'étant pas très pratique, on a intérêt à écrire notre somme double comme différence de la somme totale de tous les termes du « rectangle » contenant tous les produits ij, et de la somme des termes n'éppartenant pas à S_n, donc ceux pour lesquels $j \leqslant i$. Autrement dit, $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}$. Le facteur de degré 2 du numérateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et pour racines $n_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$, et $n_2 = \frac{1+5}{6} = 1$. Autrement dit, $3n^2 - n - 2 = (3n+2)(n-1)$, et $S_n = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$.
3. Pour la forme algébrique, on multiplie simplement par le conjugué du dénominateur : $z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 + i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Pour la forme exponentielle, il est très nettement préférable de mettre sous forme exponentielle le numérateur et le dénominateur

de la forme initiale de z : $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$, donc $1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, et $|1+i| = \sqrt{2}$, donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Il ne reste plus qu'à faire le quotient : $z = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. En comparant les deux formes obtenues, on obtient directement $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

4. Constatons déjà que le système admettra toujours le triplet $(0,0,0)$ comme solution triviale. Ensuite, on fait un pivot de Gauss, par exemple en commençant par l'opération $L_3 \leftarrow 2L_3 + (m-2)L_1$ pour obtenir le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (3-m)x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & (1-m)y & & & = & 0 \\ (-m^2+5m-8)x & + & my & & & = & 0 \end{array}\right.$$

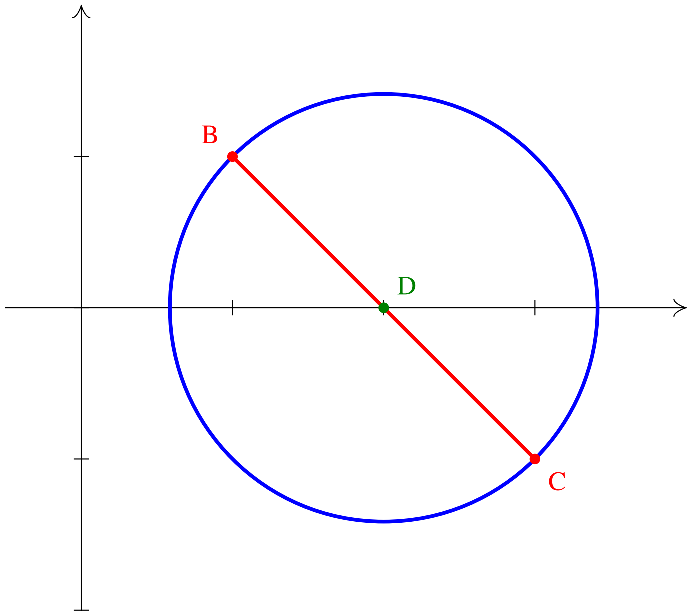
puis l'opération $L_2 \leftarrow (m^2-5m+8)L_2 + L_3$ pour éliminer la variable x de l'équation du milieu. Comme j'ai la flemme de tout recopier, donnons simplement le calcul du coefficient restant devant y dans cette équation après cette dernière opération : il est donc égal à $(m^2-5m+8)(1-m)+m = m^2-5m+8-m^3+5m^2-8m+m = -(m^3-6m^2+12m-8) = -(m-2)^3$. Si $m \neq 2$, cette équation donnera donc $y = 0$, puis la dernière équation imposera $x = 0$ (le coefficient $-m^2+5m-8$ ne peut jamais s'annuler, il a un discriminant strictement négatif), et on conclura à l'aide de la première équation que l'unique solution du système est la solution triviale $(0,0,0)$. Le seul cas particulier à traiter est donc celui pour lequel $m = 2$, où l'équation du milieu « disparaît » et nous laisse avec le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

qui se résout trivialement : $x = y$ puis $x = -\dfrac{1}{2}(x+y) = -x$, donc $\mathcal{S} = \{(x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ dans ce cas particulier.

5. Calculons : $\displaystyle\prod_{i=2}^{n}(i^2-1) = \prod_{i=2}^{n}(i-1)(i+1) = \prod_{i=1}^{n-1} i \times \prod_{i=3}^{n+1} i = (n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2} = \frac{(n+1)n((n-1)!)^2}{2}$ (il existe plein de façons d'écrire le résultat...).

6. Si on utilise les méthodes vues en cours, on va exploiter le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ soit un angle droit, donc que $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. On va plutôt l'écrire sous la forme $\dfrac{1+i-z}{3-i-z} \in i\mathbb{R}$. On pose $z = a+ib$ et on change les signes : $\dfrac{a+ib-1-i}{a+ib-3+i} = \dfrac{(a-1+i(b-1))(a-3-i(b+1)))}{(a-3)^2+(b+1)^2}$. Tout ce qu'on veut, c'est que la partie réelle du numérateur soit nulle, soit $(a-1)(a-3)+(b-1)(b+1) = 0$, donc $a^2-4a+3+b^2-1 = 0$. On reconnait une équation de cercle, qu'on met sous la forme $(a-2)^2-4+b^2+2 = 0$, soit $(a-2)^2+b^2 = 2$. Il s'agit donc d'un cercle de centre $D(2)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On constate que le centre D de notre cercle est le milieu du segment $[BC]$, et que $[BC]$ est en fait un diamètre de ce cercle (ce qui devrait vous sembler normal si vous n'avez pas tout oublié de votre géométrie de collège). Le graphique demandé :



7. (a) C'est une somme géométrique : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

   (b) Par un calcul direct, on a $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

   Sous forme de somme, on dérive la somme initiale terme à terme : $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ (le terme d'indice 0 pouvant être laissé ou supprimé au choix puisqu'il est nul).

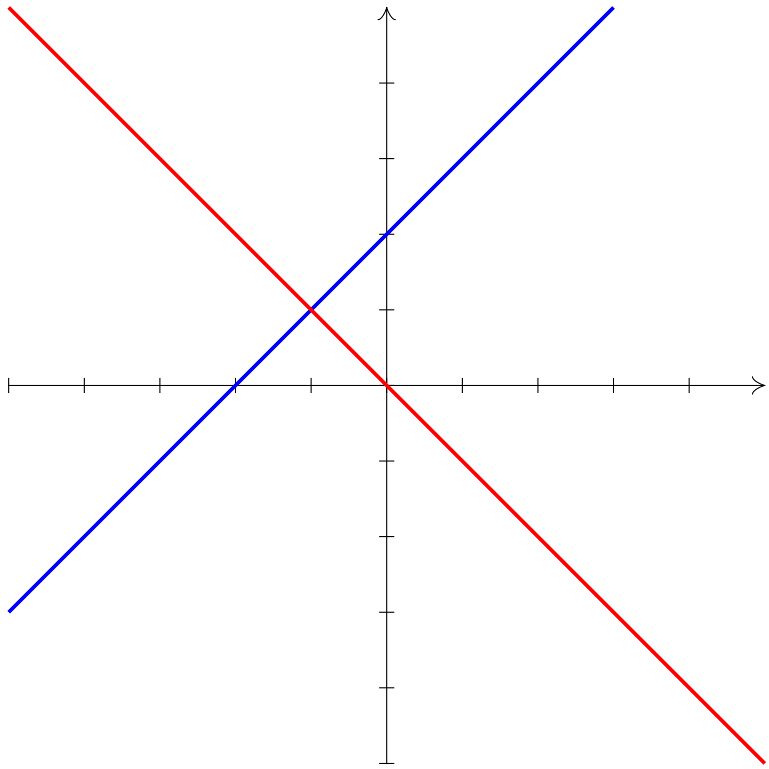
   (c) En appliquant les calculs de la question précédente pour $x = 2$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times 2^{k=1} = \dfrac{1-(n+1)2^n+n2^{n+1}}{(1-2)^2} = 1+2^n(2n-(n+1)) = 1+(n-1)2^n$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2+(n-1)2^{n+1}$ (il y a juste un facteur 2 supplémentaire par rapport à la somme précédente).

   (d) Appelons donc P_n la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2+(n-1)2^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n = 0$ puisque la somme est alors nulle et que l'expression de droite vaut $2-2^1 = 0$. Supposons-là vérifiée au rang n pour un entier naturel n quelconque, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k2^k = \sum_{k=0}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = 2+(n-1)2^{n+1}+(n+1)2^{n+1} = 2+2n2^{n+1} = 2+n2^{n+2}$, ce qui est exactement la formule à obtenir pour prouver P_{n+1}. On a dond démontré l'hérédité et achevé notre récurrence.

8. Pour la première question, on pose $z = a+ib$, et on veut donc que $\dfrac{a+i(b-2)}{a+2+ib}$ soit réel, donc $\dfrac{(a+i(b-2))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2}$ ait une partie imaginaire nulle. Ce sera le cas si le numérateur de notre fraction a lui-même une partie imaginaire nulle, donc si $(b-2)(a+2)-ab = 0$ (inutile de tout développer), soit $2b-2a-4 = 0$ ou encore $b = a+2$, équation d'une gentille droite dans le plan complexe.

   Pour le deuxième calcul, il est nettement plus malin de dire que $\left|\dfrac{z-2i}{z+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i|^2 =$

$|z+2|^2$ (tout étant réel et positif, l'élévation au carré ne pose aucun problème). À partir de là, deux possibilités : soit on connaît les rudiments de la géométrie et on reconnaît une médiatrice (égalité de distances), soit on bourrine en posant $z = a+ib$ pour obtenir l'équation $a^2+(b-2)^2 = (a+2)^2+b^2$, qui se simplifie en $-4b = 4a$, donc $b = -a$, là encore une équation de droite (encore plus simple que la précédente). Sur le magnifique dessin ci-dessous, la première droite est représentée en bleu et la deuxième en rouge.



9. On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée $x^2-3x+2=0$ a pour racines évidentes 1 et 2, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{2x}+Be^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver une solution particulière, on va d'abord en chercher une (complexe) à l'équation $y''-3y'+2y = e^{ix}$, sous la forme $y_c(x) = ae^{ix}$. Comme $y_c'(x) = iae^{ix}$ et $y_c''(x) = -ae^{ix}$, notre fonction est solution si $(-a-3ia+2a)e^{ix} = e^{ix}$, donc si $a = \dfrac{1}{1-3i} = \dfrac{1+3i}{10}$. Autrement dit, $y_c(x) = \dfrac{1+3i}{10}(\cos(x)+i\sin(x))$. Comme $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de e^{ix}, on trouve une solution particulière de l'équation $y''-3y'+2y = \cos(x)$ en calculant $\mathrm{Re}(y_c(x)) = \dfrac{1}{10}\cos(x) - \dfrac{3}{10}\sin(x)$, et une solution particulière de l'équation $y''-3y'+2y = \sin(x)$ en calculant $\mathrm{Im}(y_c(x)) = \dfrac{1}{10}\sin(x)+\dfrac{3}{10}\cos(x)$. Finalement, en appliquant le principe de superposition, la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$ est solution de l'équation de départ, dont toutes les solutions sont de la forme $y : x \mapsto Ae^{2x}+Be^x+\dfrac{2}{5}\cos(x)-\dfrac{1}{5}\sin(x)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
10. On va commencer par effectuer une décomposition en éléments simples. Le dénominateur se factorisant trivialement sous la forme $k^3-k = k(k+1)(k-1)$, il existe trois réels a, b et c pour lesquels $\dfrac{2k-1}{k^3-k} = \dfrac{a}{k-1}+\dfrac{b}{k}+\dfrac{c}{k+1}$. On utilise les astuces habituelles (multiplication par le dénominateur puis évaluation en 1, 0 et -1) pour obtenir $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -\dfrac{3}{2}$. Il

est temps de calculer notre somme (qu'on va appeler S_n pour simplifier la rédaction) à coups de décalages d'indice et de télescopage : $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{3}{2}\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2(n+1)} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2(n+1)}$.

Démontrons donc par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k^3-k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2(n+1)}$. Au rang $n = 2$, la somme se résume à son premier terme $\frac{4-1}{8-2} = \frac{1}{2}$, et l'expression de droite est égale à $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc P_2 est vraie. Supposons la formule vérifiée à un certain rang $n \geqslant 2$, alors $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-1}{k^3-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k^3-k} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2-(n+1)}$. Or, en exploitant la décomposition en éléments simples effectuée plus haut pour la valeur $k = n+1$, on a $\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2-(n+1)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)}$, dont on déduit que $S_{n+1} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+1)}$, soit exactement la propriété P_{n+1}, ce qui achève de prouver l'hérédité de notre récurrence.

Problème

1. Commençons par constater que $z_2 = e^{i\pi} = -1$, donc $S_2 = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k^2} = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$. Ensuite, $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $S_3 = z_3^0 + z_3^1 + z_3^4 = 1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (puisque $z_3^4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_3$). Écrivons-le plutôt sous forme algébrique : $S_3 = 1 + 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\sqrt{3}$. Enfin, on a $z_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, donc $S_4 = i^0 + i^1 + i^4 + i^9 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$. Le calcul des modules ne pose aucun problème : $|S_2| = 0$, $|S_3| = \sqrt{3}$ et $|S_4| = 2\sqrt{2}$.
2. Le nombre z_n est par définition un nombre de module 1, donc $z_n^{k^2}$ aussi. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité triangulaire généralisée pour obtenir $|S_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z_n^{k^2}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
3. (a) Par définition, $z_5 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, et $S_5 = z_5^0 + z_5^1 + z_5^4 + z_5^9 + z_5^{16} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{18\pi}{5}} + e^{i\frac{32\pi}{5}}$. Or, $e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i(2\pi - \frac{2\pi}{5})} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{4i\pi - i\frac{2\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{32\pi}{5}} = e^{i(6\pi + \frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Finalement, $S_5 = 1 + 2\left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right) = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en exploitant les formules d'Euler.

   (b) La démonstration a été faite dans le cas général en cours (somme des racines n-èmes de l'unité) : $\sum_{k=0}^{4} z_5^k = \frac{1 - z_5^5}{1 - z_5}$. Or, $z_5^5 = e^{i\frac{10\pi}{5}} = 1$, donc la somme géométrique est bien nulle. Il suffit de prendre sa partie réelle pour obtenir la deuxième égalité demandée.

   (c) Encore une question très difficile : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{-4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, et de même $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, d'où l'égalité demandée.

   (d) Oui, il y avait une « vraie » question de trigo dans ce sujet sur les complexes et les sommes, puisqu'il fallait connaître les formules de duplication : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) =$

$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$, donc $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)=0$, soit $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$. Notre cosinus est donc solution de l'équation $4x^2+2x-1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=4+16=20$, et admet pour racines $x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. La valeur x_1 qui est trivialement négative n'est pas crédible pour un cosinus d'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(e) On a vu plus haut que $S_5=1+4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, donc $S_5=1+4\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\sqrt{5}$. Évidemment, on a donc $|S_5|=\sqrt{5}$.

4. (a) On constate aisément que $z_7^7=1$, donc également $z^{14}=z^{21}=z^{28}=z^{35}=1$. On en déduit que $S_7=z_7^0+z_7^1+z_7^4+z_7^9+z_7^{16}+z_7^{25}+z_7^{36}=1+z_7+z_7^4+z_7^2+z_7^2+z_7^4+z_7=1+2(z_7+z_7^2+z_7^4)$. De plus, $\overline{z_7}=e^{-i\frac{2\pi}{7}}=e^{i\frac{12\pi}{7}}=z_7^6$. De même, $\overline{z_7^2}=e^{-i\frac{4\pi}{7}}=e^{i\frac{10\pi}{7}}=z_7^5$ et $\overline{z_7^4}=e^{-i\frac{8\pi}{7}}=e^{i\frac{6\pi}{7}}=z_7^3$, donc découle la deuxième équation.

(b) Un calcul très subtile donne $S_7\times\overline{S_7}=1+2z_7+2z_7^2+2z_7^4+2z_7^3+4z_7^4+4z_7^5+4+2z_7^5+4z_7^6+4+4z_7^2+2z_7^6+4+4z_7+4z_7^3$ (on a simplifié les z_7^7 à chaque fois qu'on a pu pour diminuer les puissances), soit $13+6z_7+6z_7^2+6z_7^3+6z_7^4+6z_7^5+6z_7^6=7+6\sum_{k=0}^{6}z_7^k$. La somme géométrique de droite étant nulle (même calcul qu'à la question 3.*b*), on obtient finalement $S_7\times\overline{S_7}=7$, soit $|S_7|^2=7$, donc $|S_7|=\sqrt{7}$.

5. (a) C'est à nouveau un calcul de somme géométrique assez basique : $\sum_{k=0}^{n-1}z_n^{kj}=\sum_{k=0}^{n-1}(z_n^j)^k$. Or, $z_n^j=e^{\frac{2ij\pi}{n}}$ est égal à 1 si j est un multiple de n. Dans cas, on additionne simplement n termes tous égaux à 1, ce qui donne bien une somme égale à n. Dans le cas où n n'est pas multiple de j, la raison est différente de 1, on peut appliquer la formule du cours : $\sum_{k=0}^{n-1}(z_n^j)^k=\frac{1-z_n^{nj}}{1-z_n^j}=\frac{1-e^{2ij\pi}}{1-z_n^j}=0$.

(b) Les seuls termes qui ne sont pas communs à ces deux sommes sont le dernier terme de la première somme, et le premier de la deuxième somme, donc $\sum_{k=l+1}^{l+n}z_n^{-2kj+k^2}-\sum_{k=l}^{l+n-1}z_n^{-2kj+k^2}=z_n^{-2(l+n)j+(l+n)^2}-z_n^{-2lj+l^2}=z_n^{-2lj+l^2}(z_n^{-2nj+2ln+n^2}-1)=0$ puisque tout puissance de z_n multiple de n est égale à 1.

Si on pose $u_l=\sum_{k=l}^{l+n-1}z_n^{-2kj+k^2}$, la question précédente prouve exactement que $u_{l+1}=u_l$ pour tout entier relatif l. Autrement dit, la suite (u_l) est constante (oui, c'est une suite un peu bizarre puisque ses indices ont le droit d'être négatifs, mais ça ne change rien au raisonnement ici). On a donc $u_l=u_0$ pour tout entier l, ce qui revient exactement à dire que $\sum_{k=l}^{l+n-1}z_n^{-2kj+k^2}=\sum_{k=0}^{n-1}z_n^{-2kj+k^2}$.

(c) On écrit simplement $|S_n|^2=S_n\times\overline{S_n}$, avec par définition $S_n=\sum_{l=0}^{n-1}z_n^{l^2}$ (les noms d'indices sont modifiés uniquement pour rendre la suite du calcul plus lisible), et $\overline{S_n}=\sum_{j=0}^{n-1}z_n^{-j^2}$

(en effet, $z_n^{k^2}$ est toujours un nombre complexe de module 1, dont le conjugué est égal à l'inverse), donc $|S_n|^2 = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_n^{l^2-j^2}$. On pose alors $k = l + j$ pour obtenir $|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{j+n-1} z_n^{(k-j)^2-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{j+n-1} z_n^{-2kj+k^2}$. Le résultat de la question précédente permet alors de modifier les indices de la somme intérieure pour conclure à l'égalité demandée.

(d) On reprend la formule précédente en échangeant les sommes : $|S_n| = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{k^2} \sum_{j=0}^{n-1} z_n^{-2kj}$. On a vu plus haut que la somme intérieure de cette double somme était nulle lorsque $2k$ n'est pas un multiple de n (attention, les rôles de j et k sont inversés par rapport au calcul précédent), et égale à n sinon. Or, si n est un entier impair et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $2k < 2n$ ne sera jamais un multiple de n ($2k$ qui est pair ne peut pas être égal à n qui est impair), sauf évidemment quand $k = 0$. On en déduit que $|S_n|^2 = z_n^0 \times \sum_{j=0}^{n-1} z_n^0 = n$, donc $|S_n| = \sqrt{n}$.

Lorsque n est pair, il y a une deuxième valeur de k pour laquelle la somme intérieure n'est pas nulle, qui est $k = \frac{n}{2}$. Pour les deux valeurs de k intéressantes, la somme intérieure vaut n, donc $|S_n|^2 = z_n^0 \times n + z_n^{(\frac{n}{2})^2} \times n$. Or, $z_n^{(\frac{n}{2})^2} = e^{i\frac{n\pi}{2}}$, avec n pair. Si n est un multiple de 4, cette exponentielle est égale à 1, et $|S_n|^2 = 2n$, donc $|S_n| = \sqrt{2n}$. Mais si n est un entier pair mais non multiple de 4, alors $e^{i\frac{n\pi}{2}} = -1$, et les deux termes restants de la somme s'annulent. Dans ce cas, $|S_n| = 0$. Ces résultats sont bien entendu cohérents avec les quelques valeurs calculées en début de problème.