Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

29 novembre 2025

Exercice 1

Les calculs à effectuer dans cet exercice sont complètement indépendants les uns des autres.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \text{sh}(x)$.
2. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ij$.
3. Donner la forme algébrique et la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Résoudre le système suivant, en distinguant si besoin des cas en fonction des valeurs prises par le paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (3-m)x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & (1-m)y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & (2-m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

5. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} (i^2 - 1)$.
6. Déterminer (et représenter graphiquement) tous les nombres complexes z pour lesquels les points $A(z)$, $B(1+i)$ et $C(3-i)$ forment un triangle rectangle en A. Que représente le segment $[BC]$ pour l'ensemble obtenu ?
7. On pose pour cette question $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
   (a) Rappeler la valeur de $f(x)$ lorsque $x \neq 1$.
   (b) Calculer la dérivée f' de la fonction f de deux façons : sous forme de somme, et en dérivant l'expression rappelée à la question précédente.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k$.
   (d) Redémontrer par récurrence la formule obtenue à la question précédente.
8. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = \dfrac{z - 2i}{z + 2}$. Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$, puis ceux pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$. On représentera les deux ensembles obtenus sur un même schéma.
9. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \sin(x) + \cos(x)$.
10. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k^3 - k}$, puis redémontrer par récurrence la formule obtenue.

Problème

On note pour tout cet exercice $z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{(k^2)}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Vous aurez certainement reconnu dans le nombre z_n une racine n-ème de l'unité, mais aucune connaissance sur ce sujet n'est nécessaire pour traiter le problème.

1. Calculer les valeurs de S_2, S_3 et S_4, ainsi que celles de $|S_2|$, $|S_3|$ et $|S_4|$.
2. Montrer que $|S_n| \leqslant n$.
3. Le but de cette question est de calculer la valeur de $|S_5|$.
   (a) Montrer que $S_5 = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (b) Montrer que $\sum_{k=0}^{4} z_5^k = 0$, puis que $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$.
   (c) En déduire que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
   (d) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré, puis déterminer sa valeur.
   (e) Calculer enfin S_5 puis $|S_5|$.
4. On cherche désormais à calculer la valeur de $|S_7|$.
   (a) Montrer que $S_7 = 1 + 2(z_7 + z_7^2 + z_7^4)$ et $\overline{S_7} = 1 + 2(z_7^3 + z_7^5 + z_7^6)$.
   (b) Calculer la valeur de $S_7 \times \overline{S_7}$, et en déduire la valeur de $|S_7|$ (on ne demande **pas** la valeur de S_7).
5. On se place désormais dans le cas général.
   (a) Soit $j \in \mathbb{Z}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{kj} = n$ si j est un multiple de n, et que cette somme est nulle sinon.
   (b) Si j et l sont deux entiers relatifs, montrer que $\sum_{k=l+1}^{l+n} z_n^{-2kj+k^2} - \sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = 0$.
   En déduire que $\sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}$.
   (c) Montrer que $|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}$.
   (d) Montrer que $|S_n| = \sqrt{n}$ lorsque n est impair. Que vaut $|S_n|$ quand n est pair ?