Devoir Surveillé n° 10, sujet B : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2026

Exercice 1 (polynômes)

1. La relation en question stipule que $d°(P \circ Q) = d°(P) \times d°(Q)$. Ici, on a donc $d°(P(X^2)) = 2d°(P) = d°(P(X)) + d°(P(X-1)$, donc l'égalité de l'équation (E) peut être vérifiée pour un polynôme de degré quelconque.
2. Si P est constant égal à k, on doit avoir $k = k^2$, donc $k = 0$ ou $k = 1$.
3. En posant $Y = X$, Y^2+Y+1 a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$ et pour racines complexes $Y_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les racines de X^4+X^2+1 sont les racines carrées de ces deux nombres complexes, qui sont $X_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = -X_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour la valeur Y_1 ; et $X_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $X_4 = -X_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour la valeur Y_1. Autrement dit, en notant comme souvent $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on peut factoriser le polynôme sous la forme $X^4+X^2+1 = (X-j)(X+j)(X-j^2)(X+j^2)$. On regroupe les racines conjuguées pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4+X^2+1 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$. Pour ceux qui aiment les astuces, une méthode plus rapide pour trouver la factorisation réelle : $X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+1-X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$.
4. Plein de possibilités pour obtenir la décomposition ici : les plus pressés passeront par une astuce belge pour éviter le moindre calcul, les plus laborieux feront la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ (où on n'a que des pôles simples) avant de repasser dans $\mathbb{R}(X)$. Essayons de faire directement la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, qui sera de la forme $F = \dfrac{aX+b}{X^2-X+1} + \dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$. La fraction F étant une fraction impaire, elle doit vérifier $F(-X) = -F(X)$. Sous forme décomposée, cela donne $\dfrac{-aX+b}{X^2+X+1} + \dfrac{-cX+d}{X^2-X+1} = -\dfrac{aX+b}{X^2-X+1} - \dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$. Par unicité de la décomposition en éléments simples, on en déduit que $-a = -c$, donc $a = c$, et $b = -d$. Autrement dit, $F = \dfrac{aX+b}{X^2-X+1} + \dfrac{aX-b}{X^2+X+1}$. En multipliant la fraction par X avant de faire tendre X vers $+\infty$, on obtient la condition $0 = a + a$, donc $a = 0$. Enfin, en évaluant l'égalité pour $X = 1$, on trouve $\dfrac{1}{3} = b - \dfrac{1}{3}b$, donc $b = \dfrac{1}{2}$. Il est temps de conclure : $F = \dfrac{1}{2(X^2-X+1)} - \dfrac{1}{2(X^2+X+1)}$.

Passons au calcul de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+x^2+1}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\, dx - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\times\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

5. En posant $P(X) = X^2+X+1$, on a $P(X-1) = (X-1)^2+X-1+1 = X^2-X+1$, donc $P(X)P(X-1) = (X^2+X+1)(X^2-X+1) = X^4+X^2+1$ (cf calculs de la question 3). Or $P(X^2) = X^4+X^2+1$, donc P est bien solution de (E).

6. Si $P(\alpha) = 0$, en évaluant l'équation (E) pour $X = \alpha$, on obtient $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$, donc α^2 est racine de P. De même, en évaluant pour $X = \alpha+1$, on obtient $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha+1)^2$ est également racine de P.

7. (a) Calculons donc $u_{n+1}-u_n = (1+u_n)^2-u_n = 1+u_n+u_n^2$. Comme le trinôme correspondant a un discriminant strictement négatif, cette différence est toujours strictement positive, ce qui prouve que la suite (u_n) est bien strictement croissante. On a donc deux possibilités : soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle converge vers une limite finie l. Mais dans ce cas, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on devrait avoir $l = (1+l)^2$, ce dont on vient de voir que ça ne pouvait se produire pour aucun réel. Notre suite diverge donc vers $+\infty$.

   (b) C'est une conséquence de la question 6 : si u_n est racine, alors $u_{n+1} = (1+u_n)^2$ aussi, donc, par récurrence triviale, tous les termes de la suite sont racines dès que u_0 l'est.

   (c) En effet, si c'était le cas, comme la suite est strictement croissante, P aurait une infinité de racines et serait donc nul, cas exclu depuis la question 6.

8. (a) Encore une récurrence triviale : si α^{2^n} est racine de P, alors d'après la question 6, $(\alpha^{2^n})^2 = \alpha^{2^{n+1}}$ est aussi racine de P.

   (b) Comme P n'a toujours pas le droit d'avoir une infinité de racines distinctes, on doit avoir, pour deux entiers n et n' différents, $\alpha^{2^n} = \alpha^{2^{n'}}$. Mais alors $\alpha^{2^n-2^{n'}} = 1$ donc α est une racine de l'unité.

   (c) Toutes les racines de l'unité ont pour module 1, donc la condition $|\alpha| = 1$ est évidente. Mais comme on vient de prouver que toute racine non nulle de P était de module 1, et comme $(\alpha+1)^2$ est aussi racine de P, on a également $|\alpha+1|^2 = 1$, donc $|\alpha+1| = 1$.

   (d) La condition $|\alpha| = |\alpha+1|$ impose que l'image de α dans le plan complexe est située sur la médiatrice des points d'affixe 0 et -1, donc sur la droite correspondant à une partie réelle égale à $-\dfrac{1}{2}$ (résultat qu'on peut bien sûr retrouver par le calcul). Les deux seuls points de cette droite ayant pour module 1 sont $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.

9. D'après les questions précédentes, P ne peut avoir que j et j^2 comme racines. Le polynôme est donc de la forme $P = a(X-j)^k(X-j^2)^l$, avec k et l entiers, et $a \in \mathbb{C}^*$. En fait, on

peut rapidement imposer $a = 1$: le coefficient dominant de $P(X^2)$ est le même que celui de P, alors que celui de $P(X)P(X-1)$ est égal au carré de celui de P, donc l'équation (E) implique $a = a^2$, d'où $a = 1$ (si on élimine le cas du polynôme nul). On a donc $P(X) = (X-j)^k(X-j^2)^l$, d'où $P(X^2) = (X^2-j)^k(X^2-j^2)^l$. Or, $X^2-j^2 = (X-j)(X+j)$, et $X^2-j = X^2-(j^2)^2 = (X-j^2)(X+j^2)$, donc $P(X^2) = (X-j)^l(X+j)^l(X-j^2)^k(X+j^2)^k$. D'un autre côté, $P(X-1) = (X-1-j)^k(X-1-j^2)^l = (X+j^2)^k(X+j)^l$ en exploitant l'égalité $1+j+j^2 = 0$. Finalement, l'équation (E) se ramène à l'égalité $(X-j)^l(X+j)^l(X-j^2)^k(X+j^2)^k = (X-j)^k(X-j^2)^l(X+j^2)^k(X+j)^l$, qui impose $k = l$ (les quatre racines sont distinctes et doivent avoir la même multiplicité dans le membre de gauche et de droite de l'égalité), donc $P = (X-j)^k(X-j^2)^k = (X^2+X+1)^k$.

Exercice 2 (probabilités et algèbre linéaire)

1. La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches dans l'urne avant de commencer les tirages. Or, on sait que l'urne contient initialement une boule blanche et une noire, donc $b_0 = 1$ et $a_0 = c_0 = 0$. Je refuse de faire un tableau contenant une seule case pour une variable aléatoire constante. Passons donc plutôt au cas de X_1. Pour avoir $X_1 = 0$, il faut tirer la boule blanche dans l'urne U_1 et la boule noire dans l'urne U_2 (pour les échanger et ne plus avoir de boule blanche dans U_1), ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donc $a_1 = \frac{1}{4}$. De même, pour avoir $X_1 = 2$, il faut tirer la boule noire dans u_1 et la boule blanche dans U_2, on a également $c_1 = \frac{1}{4}$. Enfin, on conservera une boule blanche dans U_1 si les deux boules tirées sont de la même couleur, ce qui donne $b_1 = \frac{1}{2}$ (peu importe ce qu'on tire dans U_1, ça impose la couleur à tirer dans U_2). On peut résumer la superbe loi correspondante dans le non moins superbe tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On calcule assez tranquillement $\mathbb{E}(X_1) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$, puis $\mathbb{E}(X^2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$, dont on déduit via la formule de König-Huygens la variance $\mathbb{V}(X_1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

2. Le nombre de boules blanches dans l'urne ne pourra jamais dépasser 2 ni descendre en-dessous de 0 (on se contente d'échanger des boules après chaque tirage, on a donc toujours deux boules dans chaque urne), donc $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. En particulier, les élèvements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ forment un système complet, et $a_n + b_n + c_n = 1$.

3. Si on suppose l'évènement $X_n = 0$ réalisé, l'urne U_1 contient les deux boules noires au moment du $n+1$-ème tirage, et l'urne U_2 contient donc nécessairement les deux boules blanches. Dans ce cas, on a la certitude de tirer une boule noire dans U_1 et une blanche dans U_2 et de se retrouver avec $X_{n+1} = 1$. Autrement dit, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 0$, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = 1$ et $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = 0$. De même, si $X_n = 2$, les deux boules blanches sont dans U_1 et les deux noires dans U_2 et le tirage suivant va nécessairement ramener une boule noire dans U_1, donc $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = 0$, $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = 1$ et $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = 0$. Enfin,

si $X_n = 1$, on est revenus à la situation initiale, et les probabiltiés seront celles calculées à la question 1 : $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$. Comme les évènements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ forment un système complet, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour en déduire que $a_{n+1} = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) \times \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) \times \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) \times \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{4}b_n$ avec les probabilités conditionnelles qu'on vient de calculer. De la même façon, $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$, et $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$.

4. Démontrons la relation par récurrence : elle est vrai au rang 0 puisque $b_0+2c_0 = 1+2\times 0 = 1$. Si elle est vérifiée au rang n, alors d'après les relations obtenues à la question précédente $b_{n+1} + 2c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + \frac{1}{2}b_n = a_n + b_n + c_n = 1$. En fait, on n'a même pas exploité l'hypothèse de récurrence. En tout cas, cette valeur représente exactement l'espérance de X_n : $b_n + 2c_n = 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_n = 2)$. Il y a donc toujours en moyenne une boule blanche dans chaque urne.

5. Il s'agit simplement de l'écriture matricielle des relations de la question 3, cette question était manifestement uniquement présente pour donner à tout le monde la bonne matrice pour la suite des calculs.

6. Calculons donc, toujours en reprenant les relations de récurrence de la question 3, $u_{n+1} = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - a_{n+1} - \frac{1}{2}b_n - c_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = -a_{n+1} - \frac{1}{2}b_n - c_n = -\frac{1}{2}u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Comme $u_0 = -1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

7. En constatant que $u_n = 2(a_n + b_n + c_n) - 3b_n = 2 - 3b_n$, on a $b_n = \frac{2 - u_n}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Comme par ailleurs on a prouvé que $b_n + 2c_n = 1$, $c_n = \frac{1 - b_n}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Enfin, $b_n + 2c_n = b_n + c_n + a_n = 1$, donc $a_n = c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Bien sûr la suite (u_n) ayant une raison comprise entre -1 et 1, elle converge vers 0, et on en déduit immédiatement que $\lim a_n = \lim c_n = \frac{1}{6}$ et $\lim b_n = \frac{2}{3}$.

8. (a) Calculons : $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, puis $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Si on cherche une relation de la forme $M^3 = aM^2 + bM + cI_3$, il suffit de regarder le coefficient « dans le coin haut-droite » pour obtenir la condition $\frac{1}{8} = a \times \frac{1}{4}$, donc $a = \frac{1}{2}$. Ensuite en prenant n'importe quel autre coefficient en-dehors de la diagonale, par exemple celui du milieu de la première ligne, on a $\frac{3}{16} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + b \times \frac{1}{4}$, donc $b = \frac{1}{2}$. On constate alors que $\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M = M^3$, ce qui dispense de continuer les calculs. Si la matrice M était inversible, on pourrait multiplier l'égalité précédente par M^{-1} pour en déduire $M^2 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_3$, relation qui est fausse (ça ne marche pas pour le tout premier coefficient). La matrice M n'est donc pas inversible.

(b) Supposons λ valeur propre de f, alors il existe un vecteur u non nul vérifiant $f(u) = \lambda u$. On en déduit que $f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$, puis de même $f^3(u) = \lambda^3 u$. Or, $f^3 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f$, donc on en déduit $\lambda^3 = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda$ (le vecteur u étant supposé non nul), ou encore $2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0$. Il faut donc résoudre l'équation $\lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1)$. Le trinôme obtenu dans la parenthèse a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $\lambda_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$, donc $\mathrm{Sp}(f) = \left\{0, 1, -\frac{1}{2}\right\}$ (en admettant que ces valeurs propres potentielles sont de vraies valeurs propres, ce qu'on va vérifier à la question suivante).

(c) Donnons l'expression explicite de f avant de passer aux calculs : $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}y, x + \frac{1}{2}y + z, \frac{1}{4}y\right)$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont simplement les vecteurs du noyau de f, donc ceux vérifiant $\frac{1}{4}y = x + \frac{1}{2}y + z = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$. Passons ensuite à la valeur propre 1, pour laquelle on va chercher les vecteurs $u(x, y, z)$ vérifiant $f(u) = u$, ce qui nous mène au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & \frac{1}{4}y & & & = & 0 \\ x & - & \frac{1}{2}y & + & z & = & 0 \\ & & \frac{1}{4}y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Les équations extrêmes imposent $x = z = \frac{1}{4}y$, et la deuxième équation est alors toujours vérifiée. On a donc $\ker(f - id) = \mathrm{Vect}((1, 4, 1))$. Enfin, il reste à chercher les vecteurs vérifiant $f(u) = -\frac{1}{2}u$, ce qui donne cette fois-ci le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{4}y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & \frac{1}{4}y & + & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array}\right.$. Les équations extrêmes imposent cette fois-ci $x = z = -\frac{1}{2}y$, et une fois de plus la deuxième équation sera toujorus vérifiée sous ces conditions. On en déduit que $\ker\left(f + \frac{1}{2}id\right) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$. La famille $\mathcal{B} = ((1, 0, -1), (1, 4, 1), (1, -2, 1))$ est constituée de vecteurs propres pour l'application f et c'est une base de $\mathbb{R}^3$: en effet, si on suppose $a(1, 0, -1) + b(1, 4, 1) + c(1, -2, 1) = 0$, alors en isolant la deuxième coordonnée on obtient la condition $c = 2b$, et les deux autres coordonnées donnent les conditions $a + 3b = -a + 3b = 0$, qui imposent $a = b = c$. La famille est donc libre, et étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base. Puisqu'il existe une base de vecteurs propres pour f, l'application est diagonalisable (sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ sera la matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont respectivement égaux à 0, 1 et $-\frac{1}{2}$).

(d) Avec les vecteurs choisis, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer son déterminant, on peut directement développer par rapport à la première colonne qui contient déjà un coefficient nul : $\det(P) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - (-6) = 12$. Pour le calcul de l'inverse (qui existe puisque le déterminant de notre matrice est non nul, ou plus simplement parce que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$), on va résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & 4y & - & 2z & = & b \\ -x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$.
La différence des équations extrêmes donne immédiatement $2x = a - c$, donc $c = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$.

De plus, en additionnant les trois équations, on trouve $6y = a+b+c$, donc $y = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c$. Il ne reste plus qu'à déduire z de la deuxième équation : $z = 2y - \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}c$.

La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) En fait, on sait déjà que $P^{-1}MP$ correspond à la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, donc est égale à la matrice diagonale D décrite en question c, mais l'énoncé incite à faire le calcul pour vérifier : $MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(f) Le premier résultat découle d'une récurrence immédiate : $M^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$. Si on la suppose vraie au rang n, alors d'après la question 5, $X_{n+1} = MX_n = X \times M^n X_0 = M^{n+1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Ensuite, il suffit de constater que $D = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$, puis de faire la récurrence habituelle pour en déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ (c'est vrai au rang 0 de façon triviale, et en supposant la formule vraie au rang n, alors $M^{n+1} = MM^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$) et obtenir la deuxième version de la formule.

(g) Il faut donc calculer M^n explicitement. Allons-y : $PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (-\frac{1}{2})^n \\ 0 & 4 & (-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & 1 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$, puis $M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 4-(-\frac{1}{2})^{n-2} & 4-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 4-(-\frac{1}{2})^{n-2} \\ 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $X_n = M^n X_0 = M_n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui revient exactement à isoler la deuxième colonne de la matrice M^n. On en déduit $a_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = \frac{1}{6}\left(4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, et $c_n = a_n$, soit exactement les mêmes formules que celles obtenues en question 7.

Exercice 3 (analyse)

1. (a) C'est une récurrence triviale.

(b) Calculons $u_{n+1} - u_n = u_n e^{\frac{1}{u_n}} - u_n = u_n(e^{\frac{1}{u_n}} - 1)$. On vient de prouver que $u_n > 0$, donc $\frac{1}{u_n} > 0$ et $e^{\frac{1}{u_n}} > 1$, ce qui prouve que $u_{n+1} > u_n$ et donc que (u_n) est strictement croissante.

(c) Si (u_n) converge, par passage à la limite dans la relation de récurrence, sa limite l vérifiera $l = le^{\frac{1}{l}}$, ce qui n'est possible que si $l = 0$ (la condition $e^{\frac{1}{l}} = 1$ n'étant jamais vérifiée). Or, la suite est strictement croissante, donc minorée par $u_0 = 1$, elle ne peut donc pas converger vers 0. Elle diverge donc, et étant croissante, vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. (a) Précisons déjà que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. En 0, on peut écrire $f(x) = \dfrac{e^X}{X}$, en posant $X = \dfrac{1}{x}$. Par croissance comparée, on a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} X = +\infty$. Aucun prolongement par continuité possible de ce côté-là. Par contre, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ (pas besoin de changement de variable ici, il n'y a aucune forme indéterminée). On peut donc prolonger f à gauche en 0 en posant $f(0) = 0$. Le taux d'accroissement correspondant a pour expression $\tau_{0^-}(h) = e^{\frac{1}{h}}$, et tend vers 0 en 0^-, ce qui prouve que le prolongement par continuité à gauche de f est dérivable, et qu'on aura une demi-tangente horizontale à la courbe représentative de f à cet endroit.

(b) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2} \times x e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \times \dfrac{x-1}{x}$. Cette dérivée est du signe du quotient $\dfrac{x-1}{x}$, qui est négatif sur $]0,1[$ et positif le reste du temps. On calcule $f(1) = 1 \times e^1 = e$, et on peut donc dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

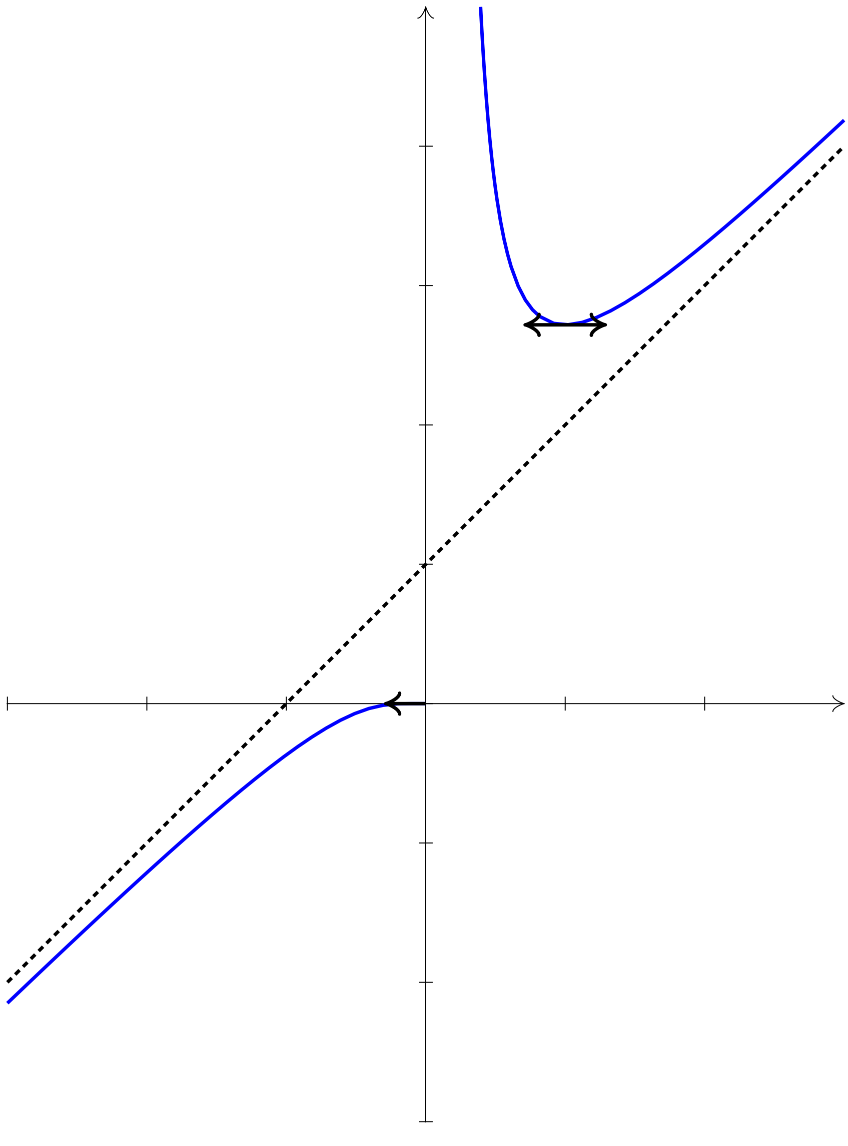
(c) La série n'est pas définie pour $x = 0$ à cause des puissances négatives. Le reste du temps, il s'agit d'une série exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = e^{\frac{1}{x}}$. Il suffit de remplacer l'exponentielle dans l'expression de f par cette somme et d'isoler les deux premiers termes pour obtenir $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}\right) = x + 1 + \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$ en sortant un facteur $\dfrac{1}{x^2}$ de la somme restante.

(d) Si $x > 0$, la somme est constituée de termes tous positifs, donc elle est certainement minorée par son premier terme, qui est égal à $\dfrac{1}{2}$. Si de plus $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$, et on peut donc majorer notre série terme à terme par $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2 < e$ (la majoration proposée est même sacrément imprécise !). En multipliant l'encadrement obtenu par $\dfrac{1}{x}$ et en exploitant la question précédente, on trouve immédiatement l'encadrement de $f(x) - (x+1)$ proposé.

(e) Les membres de gauche et de droite de l'encadrement tendant vers 0 en $+\infty$, le théorème des gendarmes nous assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$, ce qui revient exactement à dire que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe. De plus, la différence $f(x) - (x+1)$ est encadrée par deux termes positifs, donc est elle-même positive pour $x \geqslant 1$, ce qui suffit amplement à prouver que la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

(f) On pose $X = \dfrac{1}{x}$ de façon à avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$, et on calcule $f(x) = \dfrac{1}{X}e^X$
$= \dfrac{1}{X}\left(1 + X + \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) = \dfrac{1}{X} + 1 + \dfrac{1}{2}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui permet de retrouver sans difficulté les résultats de la question précédente. Du côté de $-\infty$, le même développement asymptotique est valable, et la même droite reste donc asymptote. Par contre $f(x) - (x+1) \sim \dfrac{1}{2x}$ est négatif au voisinage de $-\infty$, ce qui prouve que la courbe est en-dessous de son asymptote de ce côté.

(g) Voici la courbe demandée :



3. (a) Puisque $u_{k+1} = f(u_k) = u_k e^{\frac{1}{u_k}}$, $\ln(u_{k+1}) = \ln(u_k) + \dfrac{1}{u_k}$, donc $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$. En sommant ces égalités pour k variant entre 0 et $n-1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$. La somme de gauche est télescopique, égale à $\ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n)$ puisque $u_0 = 1$. La formule demandée en découle.

(b) On a déjà prouvé que la suite (u_n) était croissante, tous ses termes sont donc supérieurs ou égaux à 1, et on peut leur appliquer l'encadrement de la question $2.d$: $\frac{1}{2u_k} \leqslant f(u_k) - u_k - 1 \leqslant \frac{e}{u_k}$, donc $1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{e}{u_k}$. Une fois de plus, on somme ces encadrements pour k variant entre 0 et $n-1$ et on télescope la somme du milieu : $n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leqslant u_n - u_0 \leqslant n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$. En exploitant le résultat de la question précédente, on a donc $n + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - 1 \leqslant n + e\ln(u_n)$, soit $1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + e\ln(u_n)$.

(c) En divisant l'encadrement précédent par u_n, on trouve $\frac{1}{u_n} + \frac{\ln(u_n)}{2u_n} \leqslant 1 - \frac{n}{u_n} \leqslant \frac{1}{u_n} + \frac{e\ln(u_n)}{u_n}$. Or, $\lim u_n = +\infty$, donc par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$. Par ailleurs, on a bien entendu $\lim \frac{1}{u_n} = 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$, donc que $u_n \sim n$.

On sait déjà que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n)$, mais on ne peut bien sûr pas composer notre équivalent par ln. Écrivons plutôt $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n)$. Comme $\lim \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$ (cf calculs précédents), on a bien $\ln(u_n) \sim \ln(n)$ puis $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \sim \ln(n)$.