Devoir Maison n° 6 : *Devoir de Noël*

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 5 janvier 2026

Comme vous le savez tous, depuis des temps immémoriaux, un sympathique vieillard à la belle barbe blanche distribue des cadeaux aux enfants sages pour la nuit de Noël. Mais comme vous n'êtes plus vraiment des enfants et que vous n'êtes pas toujours extrêmement sages, à la place, c'est un Roupoil un peu moins vieillard (qui a dit « pas tant que ça » ?) et à la barbe rousse douteuse (pour le côté sympathique, je vous laisse libres de décider si on le conserve ou pas) qui vous propose un drôle de cadeau, constitué de quelques énigmes mathématiques sur le thème de Noël. Thème qui est à vrai dire un simple prétexte pour quelques exercices de géométrie, de dénombrement ou de probabilités, bref, uniquement des choses que vous adorez. J'aurais bien rajouté un peu de topologie et une surcouche d'espaces vectoriels normés, mais j'ai choisi d'être raisonnable, il est quand même plus dur de faire correctement des maths quand on a abusé de foie gras et de dinde aux marrons !

Le père Noël Roupoil.

Énigme 1 : *le repas de Noël.*

Pas de bonne fête de Noël sans un réveillon digne de ce nom. Cette année, les 45 élèves de la MPSI ont décidé de fêter Noël tous ensemble, et de se rassembler autour d'une table ronde de 45 places. Comme vous le savez, cette année, seulement six de ces 45 élèves sont des filles. Mais quelle est donc la probabilité que deux filles (au moins) se retrouvent assises côte à côte si on dispose les 45 élèves complètement aléatoirement autour de la table ? Cette probabilité est-elle plus grande si on répartit les 45 élèves en 3 tables de 15 élèves (tables rondes à chaque fois, avec placement aléatoire) ? Et en 5 tables de 9 élèves ?

Énigme 2 : *le sapin de Noël.*

Comme chacun sait, le sapin de Noël des MPSI est nettement plus joli que celui des PCSI (surtout depuis que ce dernier a été scandaleusement abîmé par une bande de terroristes ouzbeks qui voulaient punir les MPSI d'avoir autant massacré leur superbe sujet de DS3 mais qui se sont malencontreusement trompé de salle car ils maîtrisent mal la numération en base 10). Mais il serait encore plus beau si on le couronnait d'une étoile de Noël vraiment spectaculaire : une étoile à cinq branches régulière (ça c'est classique), incluse dans un décagone régulier (déjà, ça l'est un peu moins). Les cinq sommets de l'étoile coïncideront naturellement avec cinq sommets du décagone (un sommet sur deux, quoi). Histoire de rendre le tout encore plus fascinant, et avec le goût parfait qui les caractérise, les MPSI ont décidé de colorier l'intérieur de l'étoile en smaragdin et le reste du décagone en cuisse de nymphe émue (je vous assure que « smaragdin » et « cuisse de nymphe émue » sont des couleurs qui existent vraiment, je les ai trouvées sur Topito ; d'ailleurs peu importe, ça n'a aucune influence sur le problème). Quelle est la proportion de notre étoile qui sera de couleur smaragdin ?

Énigme 3 : *la nuit de Noël.*

Bien qu'il se soit couché beaucoup plus tard qu'il ne le devrait vu son très jeune âge, le petit Kevin (oui, vous savez, celui qui n'est pas très doué à cache-cache !) a bien du mal à s'endormir. Il faut dire qu'on est le 24 décembre et qu'il rêve déjà à la magnifique boîte de Lego « sphère cornue d'Alexander » qu'il a commandée au père Noël (promis, le jour où Lego sort vraiment un tel truc, j'en achète un exemplaire pour l'offrir à la classe de MPSI !). Ah oui, j'avais oublié de vous le préciser, mais le petit Kevin, derrière son air un peu benêt, est un génie précoce des mathématiques. Du coup, au lieu de compter les moutons pour s'endormir, il joue mentalement au « jeu du 24 » (puisqu'on est le 24 décembre), qui consiste à choisir aléatoirement quatre chiffres non nuls (on a le droit de prendre plusieurs fois le même), et à tenter d'obtenir 24 en combinant ces quatre chiffres à l'aide de trois opérations élémentaires. Obligation donc d'utiliser exactement une fois chaque chiffre, mais on a le droit de faire plusieurs fois la même opération. Ainsi, si on pioché les chiffres 3, 4, 6 et 6, on peut faire $(3 \times 4) + 6 + 6 = 24$. Les soustractions et divisions sont aussi autorisées. Arriverez-vous à gagner au jeu du 24 si vous piochez les chiffres 1, 3, 4 et 6 ? Et si vous piochez 1, 5, 5 et 5 ? Et si vous piochez 3, 3, 8 et 8 ? Et si vous piochez 3, 4, 8 et 8 ? Parmi les tirages où les quatre chiffres tirés sont identiques, combien y en a-t-il où on peut gagner ? Il n'est évidemment pas interdit de programmer pour résoudre ce problème (pour information, ce jeu existe vraiment, et on trouve facilement en ligne tout ce qu'on veut pour ne pas se fatiguer à résoudre le problème soi-même, mais je sais bien que vous saurez résister à la tentation, sinon Kevin vous fera les gros yeux).

Énigme 4 : *l'âge du père Noël*

On l'a rappelé en introduction de ce DM, ce cher père Noël est un vieux croûton. Mais quel âge lui donneriez-vous, à le voir se trimbaler de cheminée en cheminée comme si de rien n'était ? Quelques centaines d'années à peine ? Moi, en tout cas, j'aimerais bien tenir sa forme quand j'attendrai les 500 ans. Mais lui est en fait énormément plus vieux que ça, puisque son âge est un nombre à dix chiffres (presque aussi vieux que le Big Bang, le gugusse, il distribuait déjà des voitures télécommandées du temps des dinosaures). Beaucoup plus amusant, son âge vérifie la drôle de propriété suivante : son premier chiffre coïncide avec le nombre de 0 contenus dans son âge, le deuxième chiffre coïncide avec le nombre de 1, et ainsi de suite jusqu'au dixième chiffre, le chiffre des unités donc, qui coïncide avec le nombre de 9. Mais quel est donc l'âge de notre barbu préféré (curieusement, il n'existe qu'une seule solution) ?

Énigme 5 : *le dessert des rennes du père Noël*

Ce problème est un très grand classique légèrement revisité par mes soins. Pour féliciter son renne favori Rudolphe d'avoir été particulièrement efficace pendant la tournée de distribution des cadeaux (cette année, il a fait un effort, il n'a égaré que 42 cadeaux en cours de route, j'espère que les votres n'en font pas partie), il lui offre une petite récompense : il a le droit de brouter autant qu'il veut dans un pré parfaitement circulaire de 10 mètres de rayon dans lequel pousse ~~de la marijuana~~ (ah non pardon ça c'est pour la consommation personnelle du père Noël lui-même) de l'herbe particulièrement appétissante, parfumée au chocolat et au roquefort (Rudolphe a des goûts un peu spéciaux, c'est son droit). Mais pour qu'il n'abuse tout de même pas trop, Rudophe est retenu par une corde fixée sur un point situé au bord du pré (circulaire, rappelons-le, donc peu importe quel point). Quelle longueur faut-il donner à la corde pour que Rudolphe puisse brouter exactement la moitié de la superficie du pré ? Exceptionnellement, on n'attend pas nécessairement une réponse exacte pour ce problème, car on risque de tomber sur une équation peu évidente à résoudre.

Joyeux Noël et bonnes fêtes de fin d'année à tous !