Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

17 décembre 2025

Problème : étude des ensembles réticulés.

I. Quelques exemples simples.

1. La stabilité par produit et par somme de carrés de l'ensemble $\mathbb{Z}$ est triviale (un produit, un carré ou une somme d'entiers restant évidemment entière). De plus, les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ appartenant à D sont -1, 0 et 1, ils sont en nombre fini. On en déduit que $\mathbb{Z}$ est un ensemble réticulé. L'ensemble $\mathbb{R}$ ne peut pas contre évidemment pas être réticulé puisque son intersection avec D est l'intervalle $[-1, 1]$, qui n'est pas vraiment un ensemble fini (les stabilités sont par contre vérifiées, là aussi de façon triviale). L'ensemble $\mathbb{Z}i$ n'étant pas stable par produit (par exemple, $i \times i = -1 \notin \mathbb{Z}i$), on peut aussi l'exclure assez rapidement. Enfin, $A =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ est bien un ensemble réticulé : les éléments de A sont les réels de valeur absolue supérieure ou égale à 2, un produit de tels éléments reste réel et a une valeur absolue supérieure ou égale à 4, donc appartient à A. De même, les carrés d'éléments de A sont des réels au moins égaux à 4, leur somme appartient donc à l'intervalle $[8, +\infty[$ qui est inclus dans A. Enfin, l'intersection de A avec D est vide.
2. L'ensemble $A = \{0\}$ est réticulé (c'est assez trivial à vérifier une fois de plus) et vérifie clairement $N(A) = 1$. L'ensemble $\mathbb{Z}^*$ est réticulé (le produit de deux entiers non nul n'est jamais nul, le carré d'un entier non nul est toujours strictement positif, donc la somme de deux tels carrés n'est jamais nulle), et vérifie $\mathbb{Z}^* \cap D = \{-1, 1\}$, donc $N(\mathbb{Z}^*) = 2$.
3. Si $(z, z') \in A^2$, par hypothèse, z^2 et z'^2 sont des entiers relatifs, donc $(zz')^2 = z^2 z'^2 \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que $zz' \in A$, donc que A est stable par produit. De plus, $z^2 + z'^2 \in \mathbb{Z}$ comme somme d'éléments de $\mathbb{Z}$, donc A est également stable par somme de carrés. Reste à déterminer l'intersection de A avec D. Si $z \in A \cap D$, alors $|z^2| = |z|^2 \leqslant 1$, donc $z^2 \in \{-1, 0, 1\}$ (on rappelle que z^2 est supposé entier relatif). Les seuls nombres complexes ayant un carré égal à 1, 0 ou -1 sont en nombre fini, il y en a exactement cinq : 0, ± 1 et $\pm i$. L'ensemble A est donc réticulé, et $N(A) = 5$.

II. Propriétés générales des ensembles réticulés.

1. C'est assez évident. Supposons A et B réticulés. Si $(z_1, z_2) \in A \cap B$, alors $(z_1, z_2) \in A^2$, donc $z_1 z_2 \in A$ et $z_1^2 + z_2^2 \in A$. De même, $(z_1, z_2) \in B^2$, donc $z_1 z_2 \in B$ et $z_1^2 + z_2^2 \in B$. On a donc $z_1 z_2 \in A \cap B$ et $z_1^2 + z_2^2 \in A \cap B$, ce qui prouve la stabilité par produit et par somme de carrés de l'intersection. Enfin, $(A \cap B) \cap D \subset A \cap D$ est fini si $A \cap D$ est fini, donc $A \cap B$ est bien réticulé. On a ici prouvé que l'intersection de **deux** ensembles réticulés était réticulée, mais c'est exactement le même principe pour une intersection quelconque (même infinie).
2. L'énoncé aurait du dire que $n \in \mathbb{N}^*$ et pas $n \in \mathbb{N}$. La propriété est évidente à cause de la stabilité par produit, on peut en faire une démonstration rigoureuse par récurrence : $z \in A$ par hypothèse, et $z^n \in A \Rightarrow z^{n+1} = z^n \times z \in A$ par stabilité de A par produit. Si l'ensemble A contenait un nombre z vérifiant $|z| \in]0, 1[$, alors il contiendrait aussi tous les nombres z^n, qui vérifient tous $|z^n| = |z^n| < 1$, donc $z^n \in D$, mais qui sont tous distincts deux à deux

puisqu'ils n'ont pas le même module. Il y aurait donc une infinité d'éléments dans $A \cap D$, ce qui contredit le fait que A puisse être un ensemble réticulé.

3. La stabilité de B par produit est claire : si $z_1^2 \in A$ et $z_2^2 \in A$, alors $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 \in A$ par stabilité de A par produit. La stabilité par somme de carrés est encore plus claire puisqu'on a supposé A stable par somme : $z_1^2 \in A$, $z_2^2 \in A$, donc $z_1^2 + z_2^2 \in A$. Enfin, les éléments de B vérifiant $|z| \leqslant 1$ sont des racines carrées complexes d'éléments de A vérifiant nécessairement eux aussi $|z| \leqslant 1$. Par hypothèse, il y a $N(A)$ tels éléments dans l'ensemble A. Chacun de ces éléments admet deux racines carrées complexes appartenant donc à B, sauf 0 (s'il appartient à A) qui n'en a qu'une. On aura donc $N(B) = 2N(A)$ si $0 \notin A$, et $N(B) = 2N(A) - 1$ si $0 \in A$.
4. Le fait d'ajouter 0 à l'ensemble ne perturbe pas la stabilité par produit puisque $\forall z \in A$, $z \times 0 = 0 \in A \cup \{0\}$, et $0 \times 0 = 0 \ni A \cup \{0\}$. Pas de problème non plus pour la somme de carrés : $0^2 + 0^2 = 0$ et $\forall z \in A$, $z^2 + 0^2 = z^2 \in A$ puisque A est stable par produit. Dans les deux cas, la somme de carrés reste dans l'ensemble $A \cup \{0\}$. Enfin, l'intersection de $A \cup \{0\}$ avec l'ensemble D est égale à $(A \cap D) \cup \{0\}$, ce qui prouve à la fois qu'elle est finie (et donc que $A \cup \{0\}$ est bien réticulé) et que $N(A \cup \{0\}) = N(A) + 1$.
5. La stabilité par produit ne peut pas être perturbée par le fait qu'on élimine 0 de l'ensemble, puisque le produit de deux nombres non nuls ne sera jamais nuls. Le fait que l'intersection avec D reste fini est évident. Le seul problème peut donc venir de la stabilité par somme de carrés, qui ne sera plus vérifiée s'il existe dans A deux éléments non nuls z_1 et z_2 pour lesquels $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Dans ce cas, on aurait $z_1^2 = -z_2^2$, donc $z_1 = \pm i z_2$, soit effectivement $\dfrac{z_1}{z_2} = \pm i$. Il s'agit bien d'une équivalence : si deux tels éléments existent, on a une somme de carrés nulle, donc n'appartenant plus à $A \backslash \{0\}$.

III. Des exemples plus sophistiqués.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est clairement stable par produit : si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ (avec a, b, c et d tous entiers relatifs), alors $z_1 z_2 = ac - bd + i(ad + bc)$ est bien un élément de $\mathbb{Z}[i]$. Pour la même raison, $\mathbb{Z}[i]$ est stable par passage au carré, et il est trivialement stable par somme, donc stable par somme de carrés. Enfin, les seuls éléments de $\mathbb{Z}[i]$ ayant un module inférieur ou égal à 1 sont 0, ± 1 et $\pm i$, donc $\mathbb{Z}[i]$ est réticulé, et $N(\mathbb{Z}[i]) = 5$.
2. On sait bien que la somme des racines cubiques de l'unité est nulle, donc que $1 + j + j^2 = 0$. On en déduit que $j^2 = -1 - j \in \mathbb{Z}[j]$. Vérifions la stabilité par produit de l'ensemble : si $z_1 = a + jb$ et $z_2 = c + jd$, alors $z_1 z_2 = ac + j(ad + bc) + j^2 bd = ac + j(ad + bc) - bd - bdj = ac - bd + j(ad + bc - bd)$, qui est bien un élément de $\mathbb{Z}[j]$ (tous les coefficients étant ici entiers). Comme pour la question précédente, la stabilité par somme de carrés est alors évidente puisque $\mathbb{Z}[j]$ est stable par somme (et donc par élévation au carré d'après ce qui précède).
3. L'ensemble $\mathbb{Z}[j] \cap D$ contient déjà au moins 0, 1, j et j^2. Mais on peut aussi ajouter $-j = 1 + j^2$ à la liste, et aussi $-j^2 = 1 + j$. Enfin, on a comme septième élément $-1 = j + j^2$. En fait, notre ensemble contient 0 et les six racines sixièmes de l'unité complexes.
4. Calculons $|a + bj|^2 = \left| a - \dfrac{b}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left(a - \dfrac{b}{2} \right)^2 + \dfrac{3}{4} b^2$. Ah ben le calcul est fini avant d'avoir vraiment commencé. Sachant que a et b sont des nombres entiers, si on veut avoir $|a + bj|^2 \leqslant 1$ (ce qui est indispensable pour que notre nombre appartienne à D), on doit donc avoir $\dfrac{3}{4} b^2 \leqslant 1$, donc $b \in \{-1, 0, 1\}$. Si $b = 0$, on en déduit alors que $a^2 \leqslant 1$, ce qui impose $a = 0$ (donc $z = 0$), ou $a = \pm 1$ (donc $z = \pm 1$). Passons au cas où $b = 1$, alors on veut $\left(a - \dfrac{1}{2} \right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, ce qui impose $a = 0$ ou $a = 1$, donc $z = j$ ou $z = 1 + j = -j^2$. Enfin, si $b = -1$, on veut cette fois-ci $\left(a + \dfrac{1}{2} \right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, ce qui impose $a = 0$ ou $a = -1$, donc $z = -j$ ou $z = -1 - j = j^2$. On

retrouve exactement les sept éléments déjà obtenus à la question précédente, ce qui prouve que $\mathbb{Z}[j] \cap D = \{0\} \cup \mathbb{U}_6$.

5. On a tout ce qu'il faut : il est stable par produit, par somme de carrés et a une intersection avec D finie. De plus, $N(\mathbb{Z}[j]) = 7$.
6. D'après la question $II.5$, il faut prouver qu'on ne peut avoir $\dfrac{a+bj}{c+dj} = \pm i$, On peut en fait se contenter du cas où $\dfrac{a+bj}{c+dj} = i$, puisqu'un quotient égal à $-i$ serait aisément transformé en quotient égal à i en changeant les signes de a et b. Si une telle égalité était vérifiée, on aurait donc $i = \dfrac{(a+bj)(c+d\overline{j})}{|c+dj|^2}$. Or $\overline{j} = j^2$, ce qui donnerait donc un numérateur égal à $(a+bj)(c+dj^2) = ac+bd+bcj+adj^2 = ac+bd-\dfrac{1}{2}bc+\dfrac{\sqrt{3}}{2}bci-\dfrac{1}{2}ad-\dfrac{\sqrt{3}}{2}adi$. En identifiant les parties imaginaires de notre quotient censé être égal à i, on trouve alors $1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(bc-ad)}{|c+dj|^2}$, donc $\sqrt{3} = \dfrac{2|c+dj|^2}{bc-ad}$. Or, le quotient obtenu à droite est clairement un nombre rationnel (on rappelle qu'on a calculé plus haut le carré du module des éléments de $\mathbb{Z}[j]$), alors que $\sqrt{3}$ est irrationnel. C'est une absurdité, ce qui prouve qu'on ne peut pas avoir $\dfrac{a+bj}{c+dj} = i$, et donc que $\mathbb{Z}[j]\backslash\{0\}$ est bien réticulé. Bien entendu, $N(\mathbb{Z}[j]\backslash\{0\}) = N(\mathbb{Z}[i]) - 1 = 6$.
7. D'après la question $II.3$, il suffit de poser $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{Z}[j]\}$ pour obtenir un ensemble réticulé vérifiant $N(A) = 2N(\mathbb{Z}[j]-1) = 13$.

IV. Taille des ensembles réticulés.

1. Soit donc un ensemble $E \subset \mathbb{U}$ non vide et fini, et choisissons $z \in E$. En notant n le nombre d'éléments de l'ensemble E, et $z_1, \dots, z_n$ les éléments de l'ensemble, on constate que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $zz_i = z_j$ pour un certain entier $j \in \{1, \dots, n\}$, puisque l'ensemble E est stable par produit. De plus, l'application $i \mapsto z_j$ est injective car $z_i \neq z_{i'} \Rightarrow zz_i \neq zz_{i'}$ (le nombre z ne pouvant pas être nul puisqu'il appartient à $\mathbb{U}$). L'ensemble des z_j atteints lorsque i varie entre 1 et n est donc simplement l'ensemble E, ce qui prouve que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(zz_i) = \prod_{i=1}^{n} z_i$, et donc que $\displaystyle z^n\prod_{i=1}^{n} z_i = \prod_{i=1}^{n} z_i$. Ce produit n'étant pas nul, $z^n = 1$, donc z est une racine n-ème de l'unité. On a donc prouvé que $E \subset \mathbb{U}_n$. Or, E contient n éléments, et $\mathbb{U}_n$ aussi, donc cette inclusion est une égalité.
2. La question $II.2$ prouve que B ne contient aucun nombre de module strictement inférieur à 1 (puisqu'il ne contient pas 0 par définition), donc c'est un sous-ensemble de $\mathbb{U}$ stable par produit, il ne reste plus qu'à appliquer le résultat de la question précédente.
3. (a) Si $z^n = 1$, alors $(z^2)^p = 1$, donc $z^2 \in \mathbb{U}_p$. Réciproquement, si $z^2 \in \mathbb{U}_p$, alors $z \in \mathbb{U}_n$, donc tout élément de $\mathbb{U}_p$ est un carré d'un élément de A. Par stabilité de A par somme de carrés, la somme de deux éléments de $\mathbb{U}_p$ appartient donc à A.
   (b) Si n est un multiple de 4, l'entier p est pair, donc $-1 \in \mathbb{U}_p$, et $-1+1 = 0$ est une somme d'éléments de $\mathbb{U}_p$, donc appartient à A. Pour la fin de la question, l'énoncé aurait du faira apparaître un p plutôt qu'un n dans l'exponentielle. Une factorisation classique par l'angle moitié donne $e^{i\frac{2\pi}{p}} - 1 = e^{i\frac{2\pi}{p}}\left(e^{i\frac{2\pi}{p}} - e^{-i\frac{2\pi}{p}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{p}} \times 2i\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)$, dont le module est simplement égal à $\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)$. Or, $e^{i\frac{2\pi}{p}} - 1$ est la somme de deux racines p-èmes de l'unité, donc appartient à A d'après la question a, et a donc un module supérieur ou égal

à 1 d'après le $II.2$. Cela suppose $\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \geqslant \frac{1}{2}$, donc $p \leqslant 6$ si on se souvient de ses valeurs de sinus classiques.

(c) Comme $-1 \notin \mathbb{U}_p$ cette fois-ci, on va plutôt calculer $\left|e^{\frac{2ki\pi}{p}} + 1\right| = 2\left|\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right|$ (même factorisation par l'angle moitié que ci-dessus, je ne détaille pas). L'élément dont on a calculé le module appartient à A pour tout entier naturel k, et en notant $p = 2q+1$ (puisque p est supposé impair), on aura, en choisissant $k = q$, $2\left|\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{q\pi}{2q+1}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(2q+1)}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)$, qui doit encore une fois être supérieur ou égal à 1. Cette fois-ci, avec le facteur 2 devant p au dénominateur, on obtient bien la condition nécessaire $p \leqslant 3$.

4. De façon similaire aux questions précédentes, il suffit de prouver que tout élément de $\mathbb{U}_\ltimes$ est le carré d'un élément de $\mathbb{U}_n$. Or, l'application définie sur $\mathbb{U}_n$ par $z \mapsto z^2$ est à valeurs dans $\mathbb{U}_\ltimes$ (si $z^n = 1$, alors $(z^2)^n = (z^n)^2 = 1$), et elle est injective : si $z^2 = (z')^2$, alors $z = z'$ ou $z = -z'$. Or, deux racines n-èmes de l'unité ne peuvent pas être opposées lorsque n est impair : on sait qu'elles sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, elles ne peuvent être opposées que si $\frac{2k'\pi}{n} \equiv \frac{2k\pi}{n} + \pi[2\pi]$, soit $2(k'-k) \equiv n[2n]$, ce qui est impossible ($2(k'-k)$ est un entier pair, sa congruence modulo $2n$ qui est aussi pair ne peut pas donner un entier impair). L'application $z \mapsto z^2$ est donc bijective dans $\mathbb{U}_n$ est donc bien bijective, ce qui prouve que tout élément de $\mathbb{U}_n$ est carré d'un élément de $\mathbb{U}_n$, et donc qu'une somme d'éléments de $\mathbb{U}_n$ est somme de carrés d'éléments de A, et appartient donc à A. On refait alors exactement le même calcul qu'à la quesion précédente pour en déduire que $n \leqslant 3$. Si on veut prouver que $n = 1$, il n'y a qu'un seul cas à éliminer, celui où $n = 3$. Si ce cas était possible, on aurait donc $A \cap D = \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Mais alors $1^2 + j^2 = 1 + j^2 = -j \in A$, ce qui fait déjà un quatrième élément dans $A \cap D$. Le seul cas possible est donc bien $n = 1$.

5. En reprenant les questions précédentes, et les notations correspondantes :

   - si n est impair, alors $N(A) = 1$ ou $N(A) = 2$ (si on ajoute 0 dans l'ensemble).
   - si n est pair mais pas divisible par 4, alors $\frac{n}{2} \leqslant 3$, donc $n = 2$ ou $n = 6$. On peut donc avoir $N(A) = 2$ (mais on le savait déjà), $N(A) = 3$, $N(A) = 6$ ou $N(A) = 7$.
   - si n est un multiple de 4, alors $\frac{n}{2} \leqslant 6$, donc $n \in \{4, 8, 12\}$. Mais dans ce cas, on sait que 0 appartient nécessairement à A, et donc que les seules possibilités sont $N(A) = 5$, $N(A) = 9$ et $N(A) = 13$.

   En ajoutant le cas où $N(A) = 0$ (l'intersection $A \cap D$ ayant le droit d'être vide), on trouve bien les neuf valeurs annoncées : $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13$.

6. On a vu en cours de route les ensemble de taille 0, 1, 2 (dans la première partie), l'ensemble $\mathbb{Z}$ vérifie $N(A) = 3$, on a croisé l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ qui vérifie $N(A) = 5$ et l'ensemble $\mathbb{Z}[j]$ qui vérifie $N(A) = 7$. Il suffit de supprimer 0 à ce dernier pour avoir un ensemble de taille 6, et on a vu plus haut comment en déduire un ensemble de taille 13. Enfin, on peut construire un ensemble de taille 9 en considérant $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}$, qui aura pour taille $2N(\mathbb{Z}[i]) - 1 = 9$. Toutes les tailles possibles sont donc celles de vrais ensembles réticulés. Les curieux iront regarder sur le web des représentations graphiques de ces ensembles.