Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 5

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 17 décembre 2025

Problème : étude des ensembles réticulés.

Dans tout le problème, on notera comme d'habitude $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, mais aussi $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. On appelle enfin **ensemble réticulé** tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ stable par produit (donc tel que, $\forall (z_1, z_2) \in A^2$, $z_1 z_2 \in A$), stable par somme de carrés ($\forall (z_1, z_2) \in A^2$, $z_1^2 + z_2^2 \in A$), et dont l'intersection avec D est finie (éventuellement vide). On appelera alors taille de l'ensemble réticulé A le nombre entier d'éléments de $A \cap D$. Cette taille sera notée par la suite $N(A)$.

I. Quelques exemples simples.

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont réticulés (on justifiera bien entendu chaque réponse donnée) : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}i = \{ki \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R} \backslash] - 2, 2[$?
2. Donner un exemple d'ensemble réticulé vérifiant $N(A) = 1$, puis un autre vérifiant $N(A) = 2$.
3. Montrer que l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble réticulé, et préciser la valeur de $N(A)$ pour cet ensemble.

II. Propriétés générales des ensembles réticulés.

1. Montrer qu'une intersetion d'ensembles réticulés est un ensemble réticulé.
2. Montrer que si $z \in A$ avec A réticulé, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^n \in A$. En déduire que A ne peut contenir aucun nombre complexe vérifiant $0 < |z| < 1$.
3. On suppose dans cette question que A est réticulé et **stable par somme**. Montrer alors que l'ensemble $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in A\}$ est aussi un ensemble réticulé. Déterminer la valeur de $N(B)$ en fonction de celle de $N(A)$.
4. Montrer que, si A est réticulé mais ne contient pas 0, alors $A \cup \{0\}$ est aussi réticulé.
5. Montrer que, si A est réticulé et contient 0, alors $A \backslash \{0\}$ est réticulé si et seulement si $\forall (z_1, z_2) \in A^2$, $\dfrac{z_1}{z_2} \notin \{-i, i\}$ (avec z_1 et z_2 supposés non nuls).

III. Des exemples plus sophistiqués.

On note dans cette partie $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, ensemble connu sous le nom d'ensemble des entiers de Gauss. On note similairement $\mathbb{Z}[j] = \{a + jb \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, ensemble qui porte le doux nom d'ensemble des entiers d'Eisenstein.

1. Vérifier que $\mathbb{Z}[i]$ est un ensemble réticulé, et donner sa taille.
2. Montrer que $j^2 \in \mathbb{Z}[j]$, puis que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par produit et par somme de carrés.
3. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Z}[j] \cap D$ est ensemble de cardinal au moins 7.
4. Montrer que $|a + bj|^2 = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2$. À l'aide de cette égalité, déterminer précisément l'ensemble $\mathbb{Z}[j] \cap D$.

5. En déduire que $\mathbb{Z}[j]$ est réticulé et préciser sa taille.
6. Montrer que $\mathbb{Z}[j]\backslash\{0\}$ est également réticulé, et préciser sa taille.
7. Construire un ensemble réticulé A vérifiant $N(A) = 13$.

IV. Taille des ensembles réticulés.

Le but de cette dernière partie est d'obtenir toutes les valeurs possibles de $N(A)$ pour un ensemble réticulé A.

1. Montrer que, si E est un sous-ensemble fini et non vide de $\mathbb{U}$ qui est stable par produit, alors $E = \mathbb{U}_n$ pour un certain entier n.
2. On suppose pour les questions suivantes que A est un ensemble réticulé, et on note $B = (A\backslash\{0\}) \cap D$. Montrer que $B = \mathbb{U}_n$, avec n le nombre d'éléments de B.
3. On suppose dans cette question que n est pair, et on note $p = \dfrac{n}{2}$.
   (a) Montrer que, si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^2 \in \mathbb{U}_p$. En déduire que la somme de deux éléments de $\mathbb{U}_p$ appartient nécessairement à l'ensemble réticulé A.
   (b) Si on suppose que n est un multiple de 4 (et donc que p est pair), montrer que $0 \in A$ puis, en calculant $|e^{i\frac{2\pi}{p}} - 1|$, montrer que $p \leqslant 6$.
   (c) Si on suppose au contraire que p est impair, montrer que $p \leqslant 3$.
4. On suppose dans cette question que n est impair. Montrer que la somme de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ appartient à A, puis que $n \leqslant 3$ et enfin que $n = 1$.
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer toutes les valeurs possibles pour $N(A)$ (il y en a normalement neuf).
6. Existe-t-il des ensembles réticulés vérifiant $N(A) = k$ pour chacune de ces valeurs ?