

Feuille d'exercices n° 4 : Trigonométrie

MPSI Lycée Camille Jullian

1er octobre 2024

Exercice 1 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(3x) = \sin(x)$
2. $\tan(2x) = 1$
3. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
4. $2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$
5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
6. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$
7. $\arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$
9. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$
10. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$
11. $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3 (**)

Calculer $\sum_{k=1}^4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ (on doit pouvoir trouver une valeur explicite simple).

Exercice 4 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 5 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$
- $j(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ (on essaiera d'expliquer l'allure obtenue pour la courbe, qui doit rappeler celle d'une fonction usuelle).

Exercice 6 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h \cos(h) \leq \sin(h) \leq h$, puis calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\frac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\frac{1 - \cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction $\cos$.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction $\sin$ est la fonction $\cos$.

Exercice 7 (**)

Soit f la fonction définie $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Déterminer l'intervalle I le plus grand possible inclus dans $\mathbb{R}^+$ et contenant 0 sur lequel f soit toujours définie.
2. Dresser le tableau de variation de f sur I , et donner l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que f est bijective de I vers un intervalle J à préciser.
4. Déterminer la dérivée de la réciproque f^{-1} de la fonction f restreinte à l'intervalle I .

Exercice 8 (**)

On pose dans tout cet exercice $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f , puis un ensemble d'étude intelligent pour f .
2. Calculer les images $f(0)$, $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , après avoir précisé les valeurs de x pour lesquelles cette dérivée existe.
4. Simplifier l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Montrer que, $\forall x \geq 1$, $f(x) = \pi - 4\arctan(x)$.
6. Donner le tableau de variations complet de f , puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 9 (**)

On souhaite prouver dans cet exercice l'égalité $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$, valable pour tout réel x strictement positif.

1. Première méthode : démontrer la formule à l'aide d'un calcul brutal de dérivée.
2. Deuxième méthode : calculer la tangente du membre de gauche de l'égalité, et conclure rigoureusement.

Exercice 10 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(x) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Exprimer f plus simplement en vous aidant d'un calcul de dérivée.
3. Retrouver ce même résultat à partir de manipulation trigonométriques en faisant intervenir une variable θ telle que $x = \cos(\theta)$.

Exercice 11 (***)

Pour tout entier naturel n , on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction T_n .
2. Calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
3. Posons $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$ pour tout x réel. Que vaut $g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$? Quelle est la parité de g ? Sa périodicité? En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Montrer que $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sont des polynômes en x , que l'on précisera.
5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$.
(b) En déduire que pour $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
(c) Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$, puis calculer $T_4(x)$ et $T_5(x)$.
6. Démontrer que les solutions de l'équation $T_n(x) = 0$ sont les réels $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec k entre 0 et $n-1$.

Exercice 12 (**)

On pose dans cet exercice $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Calculer $f'(x)$ lorsque cela a un sens, en déduire une expression simplifiée de f .
3. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$.
4. En déduire les solutions de l'équation $\arctan(y) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 (*)

Montrer que, $\forall x \geq 0$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 14 (**)

Simplifier l'expression $\arccos\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)$ (le résultat doit s'exprimer en fonction de $\arctan(x)$ et de $\arctan(y)$).

Exercice 15 (***)

On définit une fonction f par $f(x) = \arctan\left(\frac{2-2x}{2x-x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les antécédents par f du réel $\frac{\pi}{6}$.

3. Vérifier que, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(2-x) = -f(x)$. Interpréter géométriquement ce résultat (il s'agit d'une symétrie de la courbe).
4. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f , en déduire son tableau de variations complet.
6. Tracer une allure soignée de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .
7. Simplifier l'expression de f en distinguant plusieurs intervalles (et en commençant par simplifier $f'(x)$ si ça n'a pas déjà été fait).
8. À l'aide des résultats des questions 2 et 7, déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
9. En posant $x = 1 - \tan(\theta)$, retrouver l'expression simplifiée de f sur l'intervalle $]0, 2[$.

Exercice 16 (**)

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Étudier la parité et la périodicité de f , et en déduire un intervalle d'étude de la fonction.
3. Calculer les images suivantes : $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f , et en déduire les variations de f sur l'intervalle d'étude choisi.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0. Même question au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
7. On admet que $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on essaiera évidemment de faire figurer les tangentes calculées à la question précédente).
8. Justifier que f effectue une bijection de $] -\pi, \pi[$ vers un intervalle à déterminer, et donner une allure de la courbe représentative de sa réciproque.

Exercice 17 (***)

On cherche à déterminer quels sont les réels x pour lesquels l'égalité $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin(x)$ est vérifiée. Pour cela, on pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de f . Peut-on restreindre l'étude de f à un intervalle plus petit que $\mathcal{D}_f$?
2. Étudier rigoureusement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
3. Calculer et simplifier $f'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de f sur chacun des intervalles où elle est dérivable, et répondre à la question posée en début d'énoncé.
5. On souhaite retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
 - (a) Justifier, lorsque $x \in \mathcal{D}_f$, l'existence d'un unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(\theta)$.
 - (b) Justifier que, si $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(t)) = \pi - t$. Trouver une formule similaire pour $\arcsin(\sin(t))$ si $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
 - (c) En déduire une simplification de $f(\sin(\theta))$ (en distinguant éventuellement des cas) et conclure.

Problème (***)

I. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Cette première partie présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
(b) En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
(c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
(d) Déterminer la valeur exacte de α .
2. (a) Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$ (quand cela a un sens).
(b) En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
(c) Calculer $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
(d) En déduire une équation du second degré vérifiée par α , et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

II. Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$!

Pour tous réels a et h , et pour tout entier n , on pose $C_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh)$

et $S_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh)$. On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \frac{\pi}{17}$.

1. Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin \frac{h}{2} = 0$.
2. Dans le cas contraire, prouver que $C_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$
et $S_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$ (le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).
3. On pose $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos \theta + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.
4. Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).
5. Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
6. En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2 .
7. On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos \theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
8. En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4 .
9. Calculer le produit $\cos \theta \cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos \theta$ (pour les plus masochistes courageux, finir les calculs et donner cette valeur).