

Feuille d'exercices n° 22 : Fractions rationnelles.

MPSI Lycée Camille Jullian

17 avril 2025

Exercice 1 (**)

Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions suivantes :

- $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
- $\frac{3X - 1}{X^2(X + 1)^2}$
- $\frac{1}{X^2 + X + 1}$
- $\frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$
- $\frac{2}{X(X - 1)^2}$
- $\frac{3}{(X^3 - 1)^2}$

Exercice 2 (*)

1. Montrer que $F = \frac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$ (une primitive étant bien sûr définie comme une fraction rationnelle ayant pour dérivée la fonction étudiée).
2. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.
3. Déterminer toutes les fractions rationnelles F vérifiant $F(X + 1) - F(X) = \frac{X + 3}{X(X - 1)(X + 1)}$.

Exercice 3 (** à ***)

Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

- $F_1 = \frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$
- $F_2 = \frac{X}{X^4 + 1}$
- $F_3 = \frac{X^5 - X^4 + 1}{X^3 - X}$
- $F_4 = \frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^2}$
- $F_5 = \frac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$
- $F_6 = \frac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2}$
- $F_7 = \frac{X^6}{(X^3 - 1)^2}$
- $F_8 = \frac{X^2 - 3}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$
- $F_9 = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2 + 1)^3}$
- $F_{10} = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}$ (on pourra poser en cours de route $X = Y + 1$ pour simplifier le calcul)

Exercice 4 (**)

Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 5 (**)

Calculer dans $\mathbb{C}(X)$ les décompositions en éléments simples des fractions suivantes (n est toujours un entier naturel ≥ 1) :

- $F_1 = \frac{1}{X^n - 1}$
- $F_2 = \frac{1}{(X - 1)(X^n - 1)}$
- $F_3 = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$
- $F_4 = \frac{n!}{X(X - 1)(X - 2) \dots (X - n)}$

Exercice 6 (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

1. Écrire la décomposition en éléments simples de $F = \frac{P''}{P}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0$

Exercice 7 (** à ***)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$
- $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x - 2)^2} dx$
- $I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{(x + 1)^3} dx$
- $I_4 = \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x^3 + 1)} dx$

Exercice 8 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à racines simples $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1. Exprimer à l'aide de P' et éventuellement de P'' les sommes $\sum_{i=1}^n \frac{1}{X - a_i}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2},$

et $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{(X - a_i)(X - a_j)}.$

2. Montrer que, si z est racine de P' mais $P(z) \neq 0$, alors $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, où les coefficients λ_i sont des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 9 (***)

Soit P un polynôme de degré n tel que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \int_0^1 t^k P(t) dt = 0$.

Montrer que $\int_0^1 (P(t))^2 dt = (n + 1)^2 \left(\int_0^1 P(t) dt \right)^2$.