

Feuille d'exercices n° 17 : Espaces vectoriels

MPSI Lycée Camille Jullian

11 mars 2025

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique)

Exercice 2 (*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension ainsi qu'une base pour chacun d'eux.

1. $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2. $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3. $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4. $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5. $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0\}$
7. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8. $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9. $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

Exercice 3 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E , et déterminer si possible les coordonnées de x dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ et $x = (2, 3, 4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{F} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$, $x = (-2, 3, 4, 1, 0, 0, \dots)$ (vous avez le choix pour $\mathcal{F}$!).

Exercice 4 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5 (*)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E .
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

Exercice 6 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$, $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1, 1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{\text{fonctions constantes}\}$.
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$, $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 7 (**)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, -1), (4, 5, 3, 1))$.

1. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.
3. On note G l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}$. Déterminer une base de G , ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6, 10, 8, 2)$.

Exercice 8 (*)

Montrer que chacun des ensembles F suivants est un sous-espace affine de l'espace vectoriel E , et préciser la direction de F .

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 2x + y + 2z = 1\}$.
2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \mid \text{Tr}(M) = 1\}$.
3. $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = 3\}$.
4. $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1\}$ et $F = \{f \in E \mid e^{x^2} f' + f = 1\}$.

Exercice 9 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera une base et la dimension.
2. Même question pour $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 10 (***)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G' , construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E .

Exercice 11 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{M}$.
5. Déterminer la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}$, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à $\mathcal{M}$, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans $\mathcal{M}$ dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.

Exercice 12 (***)

On note dans tout cet exercice $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Déterminer un polynôme $P_1 \in E$ tel que $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$ et $P_1(5) = 0$ (on peut utiliser les polynômes de Lagrange, mais ce n'est pas une obligation).
2. Déterminer de même un polynôme P_3 vérifiant $P_3(1) = P_3(5) = 0$ et $P_3(3) = 1$, et un polynôme P_5 vérifiant $P_5(1) = P_5(3) = 0$, et $P_5(5) = 1$.
3. Démontrer que la famille (P_1, P_3, P_5) est une famille libre dans E .
4. Expliquer (sans refaire de calculs) pourquoi cette famille est en fait une base de E .
5. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - 3X - 1$ dans cette base.
6. Calculer $Q(1)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, les résultats sont-ils cohérents avec ce que vous avez obtenu à la question précédente?
7. On note désormais $P_0 = (X - 1)(X - 3)(X - 5)$ et, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 .
 - (a) Calculer $f(X^5)$.
 - (b) Expliquer pourquoi $f(P)$ appartient toujours à E .
 - (c) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels $f(P) = 0$ (aucun calcul nécessaire).
 - (d) Démontrer que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)P_1 + P(3)P_3 + P(5)P_5$.

Exercice 13 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on note $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -X\}$. Vérifier que G_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont on déterminera une base.
2. Même question pour $G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 2X\}$.
3. Montrer que G_1 et G_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. On note P la matrice carrée dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs d'une base de G_1 et d'une base de G_2 (peu importe l'ordre). Vérifiez que P est une matrice inversible et calculez P^{-1} .
5. Calculez $P^{-1}AP$.
6. (question indépendante du reste de l'exercice, et assez brutale). On note F l'ensemble des matrices commutant avec A , montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , en donner une base et préciser sa dimension. On donnera également les coordonnées de la matrice A (qui appartient évidemment à F) dans cette base.

Exercice 14 (***) (bac C 1975)

On considère l'ensemble E de toutes les suites réelles, muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle. Il est interdit dans tout l'exercice d'avoir recours à la moindre connaissance sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1. Soit $p \in]0, 1[$ un nombre réel fixé. On note F l'ensemble des suites (u_n) de E vérifiant la relation de récurrence $pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$ pour tout entier naturel n .
 - (a) Montrer qu'une suite de F est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 .
 - (b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
 - (c) Soit $v = (v_n)$ l'unique suite de F vérifiant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, et $w = (w_n)$ l'unique suite de F vérifiant $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$. Vérifier que (v, w) est une famille libre de F , puis qu'elle est génératrice de F . En déduire la dimension de l'espace vectoriel F .
2. (a) Vérifier que, si $p = \frac{1}{2}$, les suites de F sont des suites arithmétiques.
 - (b) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite géométrique (q^n) est dans F si et seulement si $pq^2 - q + 1 - p = 0$. En déduire l'existence d'une base de F formée de suites géométriques, et en déduire une expression générale de toutes les suites de F .
 - (c) Soit i un entier fixé supérieur ou égal à 1. On cherche à déterminer une suite $u = (u_n)$ de F vérifiant $u_0 = 1$ et $u_i = 0$. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, exprimer le terme général de la suite u en fonction de n et de i .
 - (d) Dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$, exprimer de même le terme général de u en fonction de n , de i et de $x = \frac{1-p}{p}$.
3. On considère désormais l'ensemble G des suites de E vérifiant la relation de récurrence $4u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.
 - (a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3 (on pourra s'inspirer de la première question de l'exercice).
 - (b) Déterminer les suites géométriques appartenant à G , et en déduire une base de G constituée de telles suites.
 - (c) En déduire la forme générale des suites appartenant à G . Déterminer l'unique suite (u_n) de G vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{7}{4}$.