

# Chapitre 10 : Continuité

MPSI Lycée Camille Jullian

19 décembre 2024

*Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limite.*

ALPHONSE ALLAIS.

*Un prof de maths explique à un PCSI comment montrer que  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$ .*

*Le PCSI assure avoir parfaitement compris.*

*Pour vérifier, le prof lui demande ce que vaut  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5}$ .*

*Et le PCSI répond, très fier de lui :  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$ .*

Pour les derniers chapitres d'analyse du premier semestre, nous allons revenir en détail sur les outils élémentaires d'études de fonctions, en définissant rigoureusement les notions et en effectuant le plus possible de démonstrations. Pour les limites, ce sera très simple si vous avez bien assimilé le chapitre correspondant sur les suites. Quant à la continuité, ce n'est finalement qu'une question de limites (notion locale) qu'on étend sur un intervalle (notion globale). Elle mène toutefois à quelques théorèmes d'analyse fondamentaux que nous aborderons en fin de chapitre, dont le fameux théorème des valeurs intermédiaires que vous connaissez déjà bien mais que vous appliquez en général fort mal, à ne pas confondre avec son cousin le théorème de la bijection. Nous reviendrons également sur un type de suites bien particulier (les suites implicites) dont la définition et l'étude font intervenir des fonctions.

## Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des limites efficacement.
- comprendre la différence entre théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection, et reconnaître les situations permettant d'utiliser chacun d'eux.
- connaître les méthodes classiques d'étude de suites implicites.

## 1 Limites de fonctions.

### 1.1 Limites en $\pm\infty$ .

**Définition 1.** Une fonction  $f$  définie sur un voisinage de  $+\infty$  admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, |f(x) - l| < \varepsilon$ .

On définit de même une limite finie quand  $x$  tend vers  $-\infty$  en remplaçant simplement la condition  $\forall x \geq x_0$  par  $\forall x \leq x_0$ .

On le note respectivement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

*Remarque 1.* Cette définition étant strictement identique à celle qu'on a vue dans le cadre des suites, nous allons rapidement passer à la suivante. Notons qu'elle est même plus facile à manier que dans le cas des suites puisqu'on n'a pas besoin de s'embêter à prendre des parties entières pour la valeur de  $x_0$  si on veut l'appliquer à un calcul pratique de limite.

**Définition 2.** Une fonction  $f$  définie au voisinage de  $+\infty$  admet pour limite  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) en  $+\infty$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) \geq M$  (resp.  $f(x) \leq M$ ).

On le note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), et on définit bien sûr de façon similaire des limites infinies en  $-\infty$ .

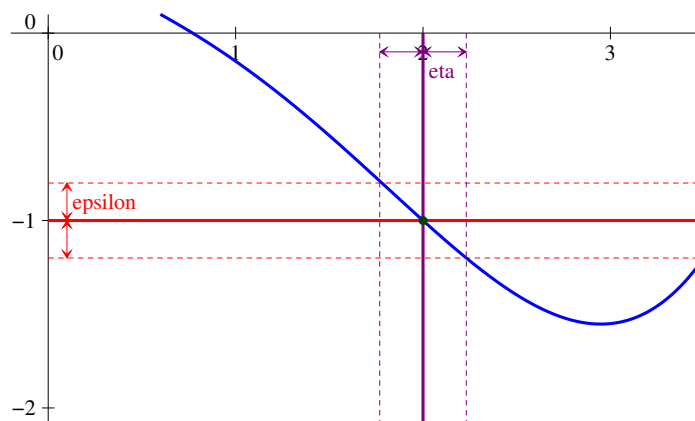
Là encore, les définitions sont rigoureusement les mêmes que pour les suites, et se manipulent exactement de la même façon.

## 1.2 Limites en $a \in \mathbb{R}$ .

**Définition 3.** Une fonction  $f$  définie sur un voisinage de  $a$  admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

*Remarque 2.* Cette définition est au fond assez naturelle : on est aussi proche que souhaité de  $l$  quitte à se mettre suffisamment près de  $a$  au départ. Si  $f$  est définie en  $a$  et y admet une limite, elle est nécessairement égale à  $f(a)$ .

Sur cette illustration, on a  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$ , avec un  $\varepsilon$  égal à 0.2 et le  $\eta$  qui en découle qui vaut environ 0.23. Le principe est, qu'une fois choisie la largeur du « tube » autour de la limite, on arrive à délimiter un intervalle (symétrique) autour de  $x$  (ici autour de 2) dans lequel la courbe représentative de la fonction va être « enfermée » dans le rectangle délimité par les deux intervalles. Bien sûr, cela doit rester vrai quelle que soit la valeur choisie pour  $\varepsilon$ , le réel  $\eta$  dépendant nécessairement de  $\varepsilon$ .



**Exemple :** Montrons à l'aide de cette définition que  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ . Fixons donc (comme on le faisait pour les suites) un  $\varepsilon > 0$ , on souhaite vérifier la condition  $|x^2 - 1| < \varepsilon$ , soit  $|x - 1| \times |x + 1| < \varepsilon$ . Quitte à imposer  $\eta \leq \frac{1}{2}$  (on cherche simplement une valeur convenable de toute façon),  $\frac{1}{2} \leq |x + 1| \leq \frac{3}{2}$ , donc il faut avoir  $|x - 1| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ . La constante  $\eta = \min\left(\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{1}{2}\right)$  convient donc.

**Définition 4.** Une fonction  $f$  définie sur un voisinage du réel  $a$  admet pour limite  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) quand  $x$  tend vers  $a$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, 0 < |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$  (resp.  $f(x) \leq M$ ). On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .

*Remarque 3.* La notion de voisinage, même si elle peut paraître extrêmement rudimentaire, permet d'unifier toutes les différentes définitions de la limite qu'on a données depuis le début du chapitre. Que  $a$  et  $l$  soient finis ou infinis, on pourra toujours traduire la limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  de la façon suivante : pour tout voisinage  $V$  de  $l$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  (je vous laisse vérifier). Elle permet aussi de donner des démonstrations simples et élégantes de la plupart des propriétés élémentaires sur les limites. On évitera toutefois un recours trop systématique à cette notion qui est à la frontière du programme.

**Proposition 1.** La limite d'une fonction  $f$  (que ce soit en  $a$  ou en  $\pm\infty$ ), lorsqu'elle existe, est unique.

*Démonstration.* C'est exactement la même preuve que dans le cas des suites. □

**Proposition 2.** Une fonction admettant une limite finie en  $a$  est bornée au voisinage de  $a$ .

*Démonstration.* Comme dans le cas des suites, il suffit de prendre par exemple  $\varepsilon = 1$  dans la définition pour trouver un intervalle sur lequel  $f$  est bornée. □

**Définition 5.** La fonction  $f$  admet pour limite  $l$  (cette limite pouvant très bien être infinie) **à gauche** quand  $x$  tend vers  $a$  si on remplace dans la définition de la limite la condition  $|x - a| \leq \eta$  par la condition  $x \in [a - \eta, a[$ . On définit de même une notion de limite **à droite** en remplaçant la condition par  $x \in ]a, a + \eta]$ . On le note respectivement  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .

*Remarque 4.* Clairement,  $f$  admet pour limite  $l$  en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .

**Exemple :** La fonction partie entière admet en chaque entier naturel des limites à gauche et à droite qui sont distinctes. Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \text{Ent}(x) = 2$ , mais  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \text{Ent}(x) = 1$ .

**Théorème 1.** Toutes les propriétés vues dans le chapitre sur les suites concernant les opérations et les limites, ainsi que les inégalités et les limites, restent valables sur les fonctions, que ce soit en  $\pm\infty$  ou en  $a \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Encore une fois, les preuves seraient les mêmes que dans le cadre des suites numériques, du moins quand les limites sont calculées en  $+\infty$ . On ne s'embêtera pas à démontrer les autres cas, qui sont tout aussi fastidieux, mais pas vraiment plus compliqués. □

*Remarque 5.* On ne redémontrera pas non plus à l'aide de nos belles définitions les limites classiques de fonctions usuelles, et encore moins celles plus techniques du type « croissances comparées » vues en début d'année. On pourra bien évidemment continuer à les utiliser dans les exercices.

**Proposition 3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$  ( $a, b$  et  $l$  étant ici des éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ , aucune raison de distinguer les limites infinies).

*Démonstration.* C'est la seule démonstration que je ferai à l'aide de voisinages pour ne pas avoir à distinguer plein de cas. Soit donc  $V$  un voisinage de  $l$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ ,  $g^{-1}(V)$  est un voisinage de  $b$ , qu'on va noter  $W$ . De même,  $f^{-1}(W)$  est un voisinage de  $a$ . On en déduit donc que  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  est un voisinage de  $a$ . Or,  $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$  (revenez à la définition de ce qu'est l'image réciproque d'un ensemble par une fonction si vous n'êtes pas convaincus), ce qui prouve la limite voulue.  $\square$

**Théorème 2.** Caractérisation séquentielle de la limite.

Une fonction  $f$  admet pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si, toute suite  $(u_n)$  convergeant vers  $a$  vérifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$ .

*Remarque 6.* Ce théorème est en fait souvent utilisé « dans l'autre sens », c'est-à-dire en exploitant sa contraposée : si on arrive à trouver une suite  $(u_n)$  convergeant vers  $a$  mais pour laquelle  $(f(u_n))$  n'admet pas pour limite  $l$ , alors on peut affirmer que  $f$  n'a pas pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$ . Cette constatation est souvent utilisée sous l'une des formes suivantes pour prouver qu'une fonction donnée n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $a$  :

- s'il existe une suite  $(u_n)$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , mais telle que  $(f(u_n))$  n'a pas de limite (ou une limite infinie), alors  $f$  ne peut pas avoir de limite (ou pas de limite finie) quand  $x$  tend vers  $a$ .
- s'il existe deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergeant toutes les deux vers  $a$ , mais telles que  $f(u_n)$  et  $f(v_n)$  admettent des limites différentes, alors  $f$  ne peut pas avoir de limite quand  $x$  tend vers  $a$  (par unicité de la limite).

*Démonstration.* Le sens réciproque est évident, c'est la composition d'une limite de suite par une fonction. Pour l'autre sens, on va en fait démontrer la réciproque : supposons que  $f$  n'admet **pas** pour limite  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Pour simplifier, on prendra des valeurs finies pour  $a$  et  $l$  même si la caractérisation reste vraie avec des limites infinies. Si on prend la négation de la définition de la limite,  $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in [a - \eta, a + \eta], |f(x) - l| \geq \varepsilon$ . Fixons donc un tel  $\varepsilon$ , et prenons comme valeurs de  $\eta$  les nombres  $\eta_n = \frac{1}{n}$ . Pour chacune de ces valeurs de  $\eta_n$ , on peut donc trouver un réel  $u_n$  dans l'intervalle  $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ , pour lequel  $|f(u_n) - l| \geq \varepsilon$ . Par construction, la suite  $(u_n)$  converge vers  $a$  (puisque  $a - \frac{1}{n} < u_n < a + \frac{1}{n}$ , c'est une application du théorème des gendarmes), et pourtant  $f(u_n)$  ne peut pas converger vers  $l$  puisque cette suite est toujours à une distance de  $l$  plus grande que  $\varepsilon$ . Ceci démontre la contraposée du sens direct du théorème, et donc le théorème lui-même.  $\square$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ , on aimerait savoir si  $f$  admet une limite quand  $x$  tend vers 0. La logique voudrait que ce ne soit pas le cas (on est dans la même situation que pour la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , et on sait bien qu'il n'y a de limite à ces endroits), pour le prouver, on va choisir des suites tendant vers 0 pour lesquelles il est facile

de voir que  $(f(u_n))$  n'aura pas toujours le même comportement. Posons d'abord  $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ , la suite  $(u_n)$  converge évidemment vers 0 et  $f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$ , donc la suite  $(f(u_n))$  est constante et converge vers 1. Mais si on pose ensuite  $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ , la suite  $(v_n)$  tend également vers 0, et cette fois-ci  $f(v_n) = -1$ . La fonction  $f$  ne peut donc pas avoir de limite en 0. On peut en fait prouver, avec un tout petit peu plus de motivation, que, quel que soit le réel  $l \in [-1, 1]$ , on peut construire une suite  $(u_n)$  qui converge vers 0 et telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$ . Cela revient à dire que la fonction  $f$  « se rapproche de tous les réels de l'intervalle  $[-1, 1]$  à la fois ».

**Théorème 3.** Théorème de la limite monotone.

Toute fonction monotone définie sur un intervalle  $I$  admet en tout point de  $I$  une limite à gauche et une limite à droite.

*Remarque 7.* Ces limites peuvent très bien être infinies. Si  $I = [a, b]$  est un intervalle fermé, le théorème n'assure bien entendu que la présence d'une limite à droite en  $a$ , et d'une limite à gauche en  $b$ .

*Démonstration.* Même démonstration que pour les suites. □

## 2 Continuité.

### 2.1 Définitions.

**Définition 6.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ ,  $f$  est **continue** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

La fonction  $f$  est **continue à gauche** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ , et **continue à droite** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

**Exemple :** La fonction partie entière (notre exemple préféré quand il s'agit de continuité) est continue à droite en tout réel, mais elle n'est pas continue à gauche en  $a$  (et donc pas continue du tout) lorsque  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Définition 7.** Une fonction  $f$  est **continue sur un intervalle**  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

**Théorème 4.** Toute fonction obtenue à l'aide d'opérations usuelles (somme, produit, quotient, composée) effectuées sur des fonctions continues est elle-même continue. Par ailleurs, toutes les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont continues sur tous les intervalles où elles sont définies.

*Remarque 8.* Ces résultats (au moins la première partie du théorème) découlent de façon triviale des résultats équivalents pour les limites, on ne refra aucune démonstration. Lorsqu'on utilisera ce type de résultats pour justifier la continuité d'une fonction dans un exercice, on les désignera sous le terme générique très flou de « théorèmes généraux » sur la continuité (ce qui revient en gros à dire « ça ne pose aucun problème, inutile de détailler »).

**Proposition 4.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a, b]$  (ou  $I = [b, a[$ ) et admettant une limite finie  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$ , alors on peut prolonger  $f$  de manière unique en une fonction  $g$  continue sur  $[a, b]$  en posant

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}.$$

La fonction  $g$  est alors appelée **prolongement par continuité** de  $f$  en  $a$ .

*Remarque 9.* Les mathématiciens les plus paresseux ont souvent tendance à noter de la même façon la fonction et son prolongement, en se contentant de donner une explication du type « on prolonge  $f$  par continuité en  $a$  en posant  $f(a) = l$  » mais c'est bien sûr un gros abus de notation, la fonction  $g$  n'a pas le même domaine de définition que  $f$ .

**Exemple :** La fonction  $f : x \mapsto x \ln x$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}^+$  en posant  $g(0) = 0$  (et bien sûr  $g(x) = x \ln(x)$  si  $x > 0$ ), puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  (croissance comparée).

**Définition 8.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $K$  un réel strictement positif,  $f$  est  **$K$ -Lipschitzienne** sur  $I$  si  $\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$ .

*Remarque 10.* Cela signifie simplement que la fonction  $f$  multiplie les distances au maximum par  $K$ . Le nom étrange donné à ces fonctions est simplement celui du mathématicien allemand Rudolf Lipschitz.

**Proposition 5.** Toute fonction  $K$ -Lipschitzienne sur un intervalle  $I$  y est continue.

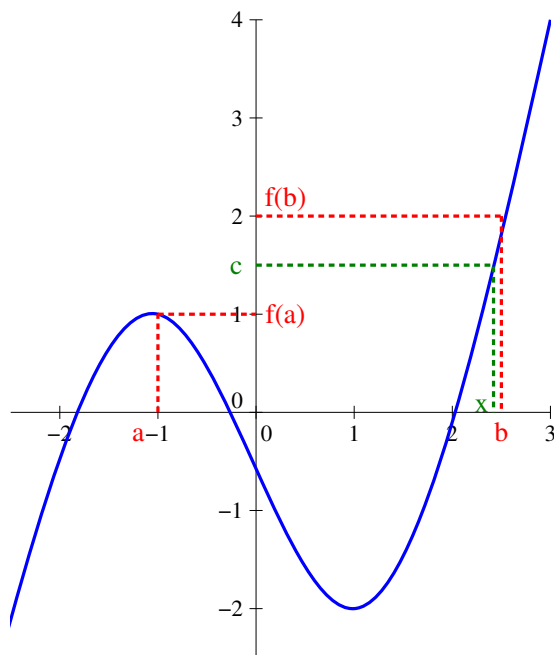
*Démonstration.* C'est évident : on a  $0 \leq |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$ , avec  $\lim_{y \rightarrow x} K|y - x| = 0$ , donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)| = 0$ , ce qui revient bien à dire que  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ , c'est-à-dire que  $f$  est continue en  $x$ . □

## 2.2 Propriétés globales.

Cette dernière partie sera simplement consacrée à un alignement de gros théorèmes fondamentaux pour la compréhension de la notion de continuité, à commencer par le plus célèbre d'entre eux :

**Théorème 5.** Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a, b]$  et  $c$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors il existe un réel  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = c$ .



*Remarque 11.* Quoi que veuillent bien en dire des générations d'élèves, le théorème des valeurs intermédiaires ne garantit pas le moins du monde l'unicité du réel  $x$ , c'est un simple théorème d'existence. Si on doit prouver qu'une équation du type  $f(x) = c$  admet une solution unique sur un intervalle, ce n'est donc pas lui qu'il faut invoquer, mais son cousin le théorème de la bijection (que nous allons revoir plus bas).

*Démonstration.* Supposons par exemple  $f(a) < c < f(b)$  (la démonstration est identique aux signes près si les inégalités sont en sens contraire) et posons  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\}$ . L'ensemble  $A$  est non vide puisqu'il contient  $a$  et borné par définition, donc il admet une borne supérieure qu'on notera  $x_0$ . Notons alors  $y = f(x_0)$ . Par caractérisation de la borne supérieure, on peut construire une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  convergeant vers  $x_0$ . Par continuité de la fonction  $f$ , on aura alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = y$ . Or,  $f(x_n) \leq c$  par construction, ce qui implique que  $y \leq c$ . Par ailleurs, par construction de  $x_0$  comme borne supérieure de l'ensemble  $A$ , tout réel strictement supérieur à  $x_0$  a une image par  $f$  strictement supérieure à  $c$ . En particulier,  $f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) > c$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \geq c$ . Cette limite existe nécessairement et est égale à  $f(x_0)$  par continuité de  $f$ , donc on a à la fois  $f(x_0) \leq c$  et  $f(x_0) \geq c$ , ce qui prouve que  $f(x_0) = c$  et démontre le théorème. Les plus attentifs d'entre vous objecteront que les valeurs  $x_0 + \frac{1}{n}$  n'appartiennent pas nécessairement à l'intervalle  $I$ , mais ce sera en fait le cas à partir d'un certain rang, sauf si  $x_0 = b$ . Mais dans ce cas le fait que  $f(x_0) \leq c$ , qu'on a déjà démontré, est en contradiction avec nos hypothèses.  $\square$

**Exercice :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ , on demande de prouver que  $f$  admet nécessairement un point fixe sur son intervalle de définition  $[0, 1]$ . Puisqu'il s'agit de prouver l'existence d'une solution à une équation (ici  $f(x) = x$ ), appliquer le théorème des valeurs intermédiaires est naturel. Attention tout de même, il est indispensable de faire passer tout ce qui est variable du même côté du signe égal pour pouvoir exploiter le théorème. Autrement dit, on ne va pas l'appliquer à la fonction  $f$ , mais à la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - x$ . Cette fonction est certainement continue sur  $[0, 1]$ , et vérifie  $g(0) = f(0) \geq 0$  (puisque la fonction  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ ), et  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$  (pour la même raison,  $f(1) \leq 1$ ). Le réel 0 est donc compris entre  $g(0)$  et  $g(1)$ , on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel  $x$  tel que  $g(x) = 0$ , c'est-à-dire  $f(x) = x$ .

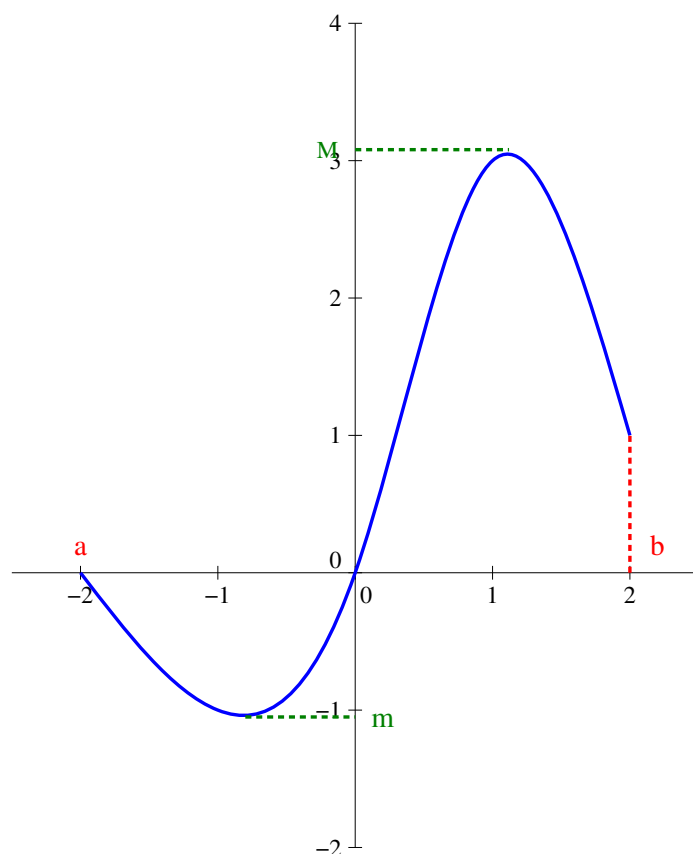
**Corollaire 1.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Démonstration.* En effet, soit  $f$  continue sur  $I$ , et  $J = f(I)$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments appartenant à  $J$ , alors par définition, il existe deux réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ , tels que  $f(a) = x$  et  $f(b) = y$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur comprise entre  $x$  et  $y$  admet alors un antécédent dans  $I$  par la fonction  $f$ , ce qui revient à dire que cette valeur appartient également à  $J$ . C'est exactement la définition d'un intervalle : tout nombre compris entre deux valeurs de l'intervalle appartient aussi à l'intervalle.  $\square$

*Remarque 12.* La nature (ouvert, fermé, borné) de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Par exemple, si  $f(x) = x^2$ ,  $f([-2, 1]) = [0, 4]$ . Si  $f$  est la fonction inverse,  $f([1, +\infty[) = ]0, 1]$ .

**Théorème 6.** Théorème du maximum.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



*Remarque 13.* Autrement dit, une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  y est bornée, et atteint forcément son minimum et son maximum. Ce résultat ressemble énormément au précédent, et pourtant il est plus profond, et ne se démontre pas uniquement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

*Démonstration.* Soit donc une fonction  $f$  définie et continue sur un segment  $[a, b]$ . Commençons par prouver par l'absurde que  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ . Supposons par exemple que  $f$  n'est pas majorée. Il existe alors, pour tout entier naturel  $n$ , un réel  $x_n$  dans l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(x_n) \geq n$  (la valeur  $n$  étant prise entière par souci de commodité). La suite  $(x_n)$  étant bornée, elle admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, une sous-suite  $y_n$  convergeant vers un réel  $c$ . Par continuité de  $f$ , on devrait donc avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = f(c)$ . Or,  $f(x_n) \geq n$  implique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ , et la limite est donc la même pour la sous-suite  $(f(y_n))$ . On a obtenu une absurdité, la fonction est donc nécessairement majorée. Elle est minorée pour les mêmes raisons. Le fait qu'elle atteigne ses bornes découle de la caractérisation de la borne supérieure : notons par exemple  $M$  la borne supérieure des valeurs prises par  $f$ , alors on peut construire une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $[a, b]$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$ . Cette suite  $(x_n)$  admet, toujours d'après notre ami Bolzano, une sous-suite convergente  $(y_n)$ . En notant  $l$  sa limite (qui appartient nécessairement à l'intervalle  $[a, b]$  puisque celui-ci est fermé) on aura par construction (et par continuité de  $f$ )  $f(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = M$ , ce qui prouve que  $M$  est en fait un maximum.  $\square$

**Théorème 7.** Théorème de la bijection.

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  est bijective de  $I$  vers  $J = f(I)$  et sa réciproque  $g$  est continue et strictement monotone (de même monotonie que  $f$ ) sur  $J$ .

*Démonstration.* Supposons  $f$  croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que  $f(I)$  (qu'on notera  $J$  dans la suite de la démonstration) est un intervalle (premier corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), et de plus  $f$  est injective car strictement monotone, donc bijective de  $I$  vers  $J$  (elle est par définition surjective si on prend  $J$  comme ensemble d'arrivée). On peut donc définir sa réciproque  $g$  sur  $J$ . De plus, si  $y$  et  $y'$  sont deux éléments de  $J$  tels que  $y < y'$ , il existe deux réels  $x$  et  $x'$  dans  $I$  tels que  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ . Par croissance de la fonction  $f$ , on doit avoir  $x < x'$ , donc  $g(y) = x < x' = g(y')$  et  $g$  est strictement croissante sur  $J$ . Enfin, soit  $y \in J$ ,  $x = g(y)$  et  $\varepsilon > 0$  (et tel que  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$ , sinon il n'y a pas de problème). Notons  $y_1 = f(x - \varepsilon)$ ,  $y_2 = f(x + \varepsilon)$ . Posons  $\eta = \min(y - y_1, y_2 - y)$ . On a alors  $[y - \eta, y + \eta] \subset [y_1, y_2]$ , donc par croissance de  $g$ ,  $g([y - \eta, y + \eta]) \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Ceci prouve la continuité de  $g$  en  $y$ .  $\square$

**Théorème 8.** Soit  $f$  une fonction continue et injective sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

*Démonstration.* Ce théorème, qui énonce une espèce de réciproque du théorème de la bijection, sera admis. Il n'est pas très dur de se convaincre que ce résultat, ou plutôt sa contraposée, est logique à partir du théorème des valeurs intermédiaires : si  $f$  n'est pas strictement monotone, on peut par exemple trouver trois valeurs  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'intervalle telles que  $x < y < z$ , mais  $f(y) > f(x)$  et  $f(y) > f(z)$ . Dans ce cas, tout réel compris entre le  $\max(f(x), f(z))$  et  $f(y)$  admettra (au moins) deux antécédents par  $f$ , l'un dans l'intervalle  $]x, y[$  et l'autre dans l'intervalle  $]y, z[$ , ce qui contredit l'injectivité de  $f$ .  $\square$

**Proposition 6.** Méthode de dichotomie.

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , telle que  $f(a)f(b) < 0$  (autrement dit,  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  en posant  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$  puis en procédant ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ , et si  $f(a_n)f(c_n) < 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$ . Dans le cas contraire on pose  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ . Les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune  $\alpha$  vérifiant  $f(\alpha) = 0$ . De plus, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , ce qui majore l'erreur commise en approchant  $\alpha$  par  $a_n$  ou  $b_n$ .

*Démonstration.* La croissance de la suite  $(a_n)$  et la décroissance de  $(b_n)$  découlent de façon immédiate de leur définition (on a toujours  $a_n \leq c_n \leq b_n$ ). Prouvons donc l'affirmation  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  par récurrence. Au rang 0, on a  $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$ , donc la propriété est vraie. Supposons la vraie au rang  $n$ . On a alors, au choix,  $b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ , ou  $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ . Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence,  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ , ce qui prouve la propriété au rang  $n+1$ . Les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc bien adjacentes, et convergent vers un même réel  $\alpha$ .

Reste à prouver que  $f(\alpha) = 0$ . Par construction, on aura toujours  $f(a_n)$  du même signe que  $f(a)$  donc, la fonction étant continue, par passage à la limite,  $f(\alpha)$  aura également le même signe que  $f(a)$ . De même,  $f(b_n)$  a le même signe que  $f(b)$ , ce qui implique que  $f(\alpha)$  aussi. Comme  $f(a)$  et  $f(b)$  sont supposés de signe opposé, la seule possibilité est  $f(\alpha) = 0$ .  $\square$

**Exemple d'utilisation :** On cherche à déterminer les solutions éventuelles de l'équation  $x^3 + 2x + 1 = 0$ . On pose pour cela  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ . Cette fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et s'annule en particulier une seule fois. Notons  $\alpha$  la valeur correspondante, et cherchons à déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  par dichotomie. Il faut commencer par trouver un premier encadrement de  $\alpha$  pour déterminer les valeurs initiales  $a$  et  $b$  des deux suites que l'on va construire. On constate que  $f(0) = 1$  et  $f(-1) = -2$ , donc la racine de  $f$  se trouve dans l'intervalle  $[-1, 0]$ . On calcule ensuite  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - 1 + 1 = -\frac{1}{8} < 0$ , donc  $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ . Puis on calcule  $g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{31}{64} > 0$ , donc  $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ . On sait donc déjà que  $\alpha \simeq -\frac{3}{8}$ , à  $\frac{1}{8}$  près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre de calculs de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à  $\varepsilon > 0$  près, il suffit de choisir  $n$  tel que  $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ , c'est-à-dire un nombre d'étapes qui croît de façon logarithmique si la variable recherchée est le nombre de décimales exactes de la valeur approchée.

### 3 Suites implicites.

Dans cette dernière partie, nous allons donner un exemple détaillé (sous forme d'exercice) d'étude d'un type de suites intervenant fréquemment dans les exercices, et pour lesquelles il faut donc avoir certains réflexes à adopter, même si aucun résultat précis ne sera énoncé sous forme de théorème (on se contentera de donner en fin d'exercice un rappel des méthodes). Une suite implicite est la plupart du temps définie par une condition du type  $f_n(u_n) = 0$ , où  $f_n$  désigne une suite de fonctions ayant

généralement une équation très similaire mais faisant bien sûr intervenir comme paramètre l'entier naturel  $n$ . Nous reverrons la suite étudiée dans cet exercice dans un chapitre ultérieur pour affiner encore les résultats démontrés en fin d'exercice.

**Exercice :** On définit pour tout cet exercice la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = e^x - nx$ .

1. Étudier les variations des fonctions  $f_n$ , et prouver que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet deux solutions lorsque  $n \geq 3$ . On notera  $u_n$  la plus petite de ces deux solutions.
2. Montrer que,  $\forall n \geq 3$ ,  $u_n > 0$ .
3. Déterminer le signe de  $f_{n+1}(u_n)$ , en déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
4. Faire une représentation graphique des premières fonctions  $f_n$  permettant d'illustrer les résultats déjà démontrés.
5. Montrer la convergence de  $(u_n)$ , puis prouver par l'absurde que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
6. Déterminer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ .

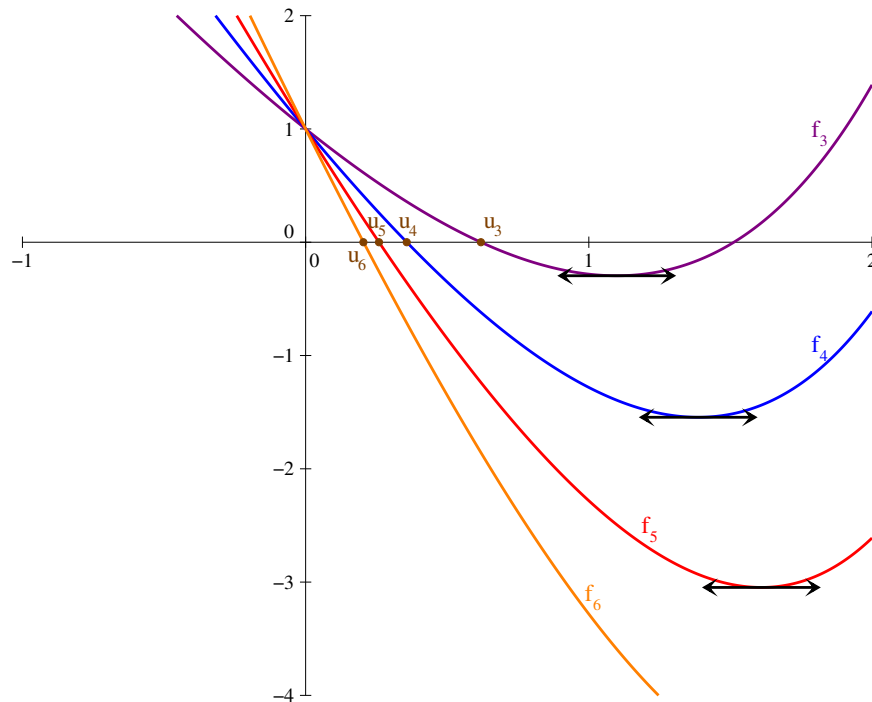
**Solution :**

1. Toutes les fonctions sont définies, continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'_n(x) = e^x - n$ . La fonction  $f_n$  admet donc un extremum en  $\ln(n)$ , de valeur  $f_n(\ln(n)) = n - n \ln(n)$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$  (on suppose ici  $n \geq 1$ , on va de toute façon très rapidement se restreindre à des valeurs de  $n$  au moins égales à 3), et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  par croissance comparée. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

| $x$   | $-\infty$ | $\ln(n)$        | $+\infty$ |
|-------|-----------|-----------------|-----------|
| $f_n$ | $+\infty$ | $n(1 - \ln(n))$ | $+\infty$ |

Pour que l'équation  $f_n(x) = 0$  puisse avoir des solutions, il faut que son minimum soit négatif, donc que  $\ln(n) > 1$ , ce qui implique bien  $n \geq 3$ . Dans ce cas, la fonction est continue et strictement monotone sur chacun des deux intervalles  $] - \infty, \ln(n)]$  et  $[\ln(n), +\infty[$ , donc bijective de chacun de ces intervalles vers  $[n(1 - \ln(n)), +\infty[$ . Comme 0 appartient à cet intervalle image, il admet un unique antécédent par  $f_n$  dans chacun des deux intervalles où elle est monotone, ce qui prouve que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement deux solutions (la seule valeur commune entre les deux intervalles,  $\ln(n)$ , a une image non nulle par  $f_n$ ). En notant  $u_n$  la plus petite des deux, on peut déjà affirmer que  $u_n < \ln(n)$ .

2. Il suffit de calculer  $f_n(0) = 1$  pour constater que  $f_n(0) > f_n(u_n)$ . La fonction  $f_n$  étant décroissante sur l'intervalle  $] - \infty, \ln(n)]$  auquel appartiennent 0 et  $u_n$ , on en déduit que  $0 < u_n$ .
3. On calcule  $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n$ . Mais, par définition,  $f_n(u_n) = e^{u_n} - nu_n = 0$ , donc  $e^{u_n} = nu_n$ , ce qui permet de simplifier notre calcul :  $f_{n+1}(u_n) = nu_n - (n+1)u_n = -u_n$ . En particulier,  $f_{n+1}(u_n) < 0$  puisque  $u_n > 0$ . Comme par ailleurs  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ , on peut donc affirmer que  $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ , et la décroissance de la fonction  $f_{n+1}$  sur l'intervalle  $] - \infty, \ln(n+1)]$  (auquel appartiennent  $u_n$  et  $u_{n+1}$ ) permet de conclure que  $u_n > u_{n+1}$ . La suite  $(u_n)$  est donc strictement décroissante.
4. Les deux points essentiels à visualiser sont les suivants : les courbes sont décroissantes (sur les intervalles qui nous intéressent) et surtout la courbe de  $f_n$  est au-dessus de celle de  $u_{n+1}$  (c'était le sens du premier calcul de la question précédente), ce qui explique qu'elle coupe l'axe des abscisses après cette dernière, et donc que  $u_n > u_{n+1}$  :



5. La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge certainement, vers une limite  $l \geq 0$ . Si on avait  $l > 0$ , on pourrait en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$ . Or on sait que, par définition de la suite, on a toujours  $nu_n = e^{u_n}$ . On devrait donc avoir une limite infinie pour  $e^{u_n}$ , ce qui n'est pas compatible avec le fait que la suite  $(u_n)$  converge. C'est absurde, on a nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
6. Il suffit de reprendre l'égalité déjà exploitée dans la question précédente : puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = 1$ . Or,  $e^{u_n} = nu_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ . On notera bientôt ceci de la façon suivante :  $u_n \sim \frac{1}{n}$  (ce qui signifie que les deux suites ont le même ordre de grandeur quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ). Nous verrons même bientôt comment obtenir des informations beaucoup plus précises, pour commencer un ordre de grandeur de l'écart entre  $u_n$  et  $\frac{1}{n}$ , à l'aide des développements limités.

Pour conclure, donnons une petite liste plus générale des méthodes à connaître pour l'étude de ce type de suites. On débutera de toute façon toujours par l'étude des variations des fonctions  $f_n$ .

- on utilisera systématiquement le théorème de la bijection pour justifier l'existence et l'unicité de la solution à l'équation définissant  $u_n$ .
- pour majorer ou minorer une telle suite par un réel  $M$ , on se contente de calculer  $f_n(M)$  et d'utiliser la monotonie des fonctions  $f_n$  pour conclure.
- pour étudier la monotonie de la suite, on tentera d'exprimer  $f_{n+1}(u_n)$  (ou  $f_n(u_{n+1})$ ) sous une forme simple (le but est de pouvoir déterminer son signe), pour le comparer à  $f_{n+1}(u_{n+1})$  (qui est nul par hypothèse). Là encore, les variations de  $f_n$  permettront de conclure.
- pour déterminer la limite éventuelle de la suite, on tentera de passer à la limite dans la relation  $f_n(u_n) = 0$ . On aura par ailleurs régulièrement recours à un raisonnement par l'absurde.