Programme de colle n$^{\text{o}}$ 24

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 07/04 au 11/04 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 19 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ quand E et F sont de dimension finie.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- Notation f^n pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, **théorème du rang**.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie). Majoration du rang d'une composée : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
- Formes linéaires et hyperplans, un hyperplan H en dimension infinie est défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Applications linéaires « géométriques » :
  - — homothéties
  - — projection sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G, **caractérisation des projections par la relation** $p^2 = p$, caractérisation des sous-espaces F et G comme image et noyau de la projection p, caractérisation de l'image comme $\ker(p - \mathrm{id})$
  - — symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G, caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \mathrm{id}$, caractérisation des sous-espaces F et G comme noyaux de $s - \mathrm{id}$ et de $s + \mathrm{id}$, relation $s = 2p - \mathrm{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

Si on ne veut pas faire une colle entièrement consacrée à l'algèbre linéaire, on a le droit de compléter avec un petit exercice sur le programme précédent (intégration).

Prévisions pour la semaine suivante : séries.