Programme de colle n° 21

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 17/03 au 21/03 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 17 : Analyse asymptotique.

- Négligeabilité et équivalence :
  - — définition pour les suites (sous la forme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$
  - — manipulations et règles de calcul (produits et quotients, passage des équivalents à une puissance quelconque, équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$, on a bien sûr insisté sur l'interdiction d'additionner des équivalents ou de les composer par d'autres fonctions que les fonctions puissances), on autorise les abus de notation du type « $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$ »
  - — extension aux fonctions réelles
  - — croissances comparées, équivalents classiques issus de taux d'accroissements ($\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$)
- Développements limités :
  - — formule de Taylor-Young
  - — vocabulaire (partie régulière d'un DL) et notations
  - — parité de la partie régulière du DL d'une fonction paire ou impaire
  - — formulaire de DL usuels à connaitre par coeur : e^x, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (on doit en particulier connaître par coeur les premiers termes du DL de $\sqrt{1+x}$)
  - — méthodes de calcul d'un produit, quotient, composée de DL (on autorise les notations légèrement abusives consistant à écrire directement des o dans les composées), intégration ou dérivation de DL
  - — formulaire de DL à savoir retrouver rapidement : $\tan(x)$ (les trois premiers termes doivent être connus), $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$
- Applications classiques des calculs de DL :
  - — calculs de limites (suites ou fonctions), on doit être capable de choisir l'ordre du DL en anticipant le calcul pour ne pas faire de calculs complexes inutilement
  - — étude locale de fonction (existence de tangente et position relative de la courbe et de la tangente en 0, existence d'asymptotes obliques et position relative en $\pm\infty$)
  - — développements asymptotiques de suites implicites

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
  - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
  - Familles génératrices, familles libres et liées, bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- la dimension n'a pour l'instant été vue que de façon purement intuitive, aucun résultat théorique n'est donc à connaître sur ce sujet.
- une démonstration d'un résultat facile du chapitre pourra être posé en guise de question de cours (par exemple montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel, ou que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel).

Prévisions pour la semaine suivante : espaces vectoriels (avec un peu de dimension).