

Programme de colle n° 19

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 17/02 au 21/03 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 14 : Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble fini : définition et notations (sont acceptés : $\text{Card}(E)$, $|E|$ ou $\sharp E$), propriétés élémentaires ($|\overline{A}| = |E| - |A|$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, la formule du crible générale n'est pas à connaître mais les élèves doivent être capables de l'énoncer dans le cas d'une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons :
 - définition des p -listes d'un ensemble E , dénombrement des p -listes, exemple fondamental des tirages successifs avec remise dans une urne
 - définition des arrangements de p éléments d'un ensemble, dénombrement des arrangements comme quotient de factorielles, exemple fondamental des tirages successifs sans remise dans une urne, cas particulier des permutations des éléments d'un ensemble, dénombrement des anagrammes d'un mot
 - définition des combinaisons comme sous-ensembles à p éléments d'un ensemble fini, dénombrement des combinaisons à l'aide des coefficients binômiaux, exemple fondamental des tirages simultanés dans une urne

Chapitre 15 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée, et propriétés élémentaires.
- Racines d'un polynôme :
 - notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, **division euclidienne**
 - **factorisation d'un polynôme par $X - a$ quand a est racine de P** , nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n , principe d'identification des coefficients
 - polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, théorème de d'Alembert-Gauss

- relations coefficients racines (sans forcément énoncer une formule générale, mais à savoir retrouver très rapidement pour un polynôme de degré 3 ou 4)
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:
 - polynôme irréductible, caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
 - PGCD, PPCM de deux polynômes ou d'une famille de polynômes, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, polynômes premiers entre eux
 - décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (on doit être capable de **justifier le résultat** en partant de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant que si z est racine de P alors $\bar{z}$ l'est aussi avec la même multiplicité, puis en calculant le produit $(X - z)(X - \bar{z})$ pour faire apparaître les coefficients réels)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- **formule de Taylor pour les polynômes** (on a fait la démonstration dans le cas où $P = X^i$ puis très rapidement invoqué la linéarité pour justifier le cas général).

Prévisions pour la rentrée : analyse asymptotique (équivalence et négligeabilité, puis DL).