

Programme de colle n° 13

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 06/01 au 10/01 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 9 : Structures algébriques.

- Groupes :
 - loi de composition interne (loi) sur un ensemble, associativité, commutativité d'une loi, partie stable par une loi
 - élément neutre pour une loi, **unicité de l'élément neutre**, symétrisabilité d'un élément pour une loi (opposé pour une loi additive, inverse pour une loi multiplicative), **unicité du symétrique pour une loi associative**
 - groupe, sous-groupe, caractérisation des sous-groupes par la stabilité par la loi et par symétrisation, groupe des permutations d'un ensemble, groupe produit de deux groupes
 - morphismes de groupes (et endomorphismes, isomorphismes, automorphismes), propriétés élémentaires (image du neutre par un morphisme, image du symétrique par un morphisme, image ou image réciproque d'un sous-groupe), noyau et image d'un morphisme, **caractérisation de l'injectivité** et de la surjectivité d'un morphisme à l'aide du noyau et de l'image, groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes d'un groupe G pour l'opération de composition
- Anneaux et corps :
 - définition d'un anneau, puissances d'un élément dans un anneau
 - règles de calcul dans un anneau (0 est absorbant, $n(xy) = (nx)y = x(ny)$ pour tout entier relatif n , formule du binôme pour deux éléments qui commutent)
 - unités d'un anneau, anneau intègre, sous-anneaux, morphismes d'anneaux.
 - corps et sous-corps ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ a été donné en exemple mais absolument aucune connaissance n'est exigible sur ces ensembles, et plus généralement sur la notion de groupe quotient d'ailleurs)

Chapitre 10 : Continuité.

- Limites de fonctions :
 - définition des différents types de limites, règles de calcul, composition de limites

- limites à gauche et à droite, existence de ces limites pour les fonctions monotones
- caractérisation séquentielle de la limite (notamment utilisée pour prouver qu'une fonction du type $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0)
- Définition de la continuité en un point et sur un intervalle, stabilité par les différentes opérations usuelles, continuité à droite et à gauche, fonctions Lipschitziennes.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** et conséquences (théorème de la bijection, théorème du maximum, toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone)
- l'étude des suites implicites sera au programme de la semaine prochaine

Prévisions pour la semaine suivante : continuité (avec suites implicites), peut-être le début du calcul matriciel.