

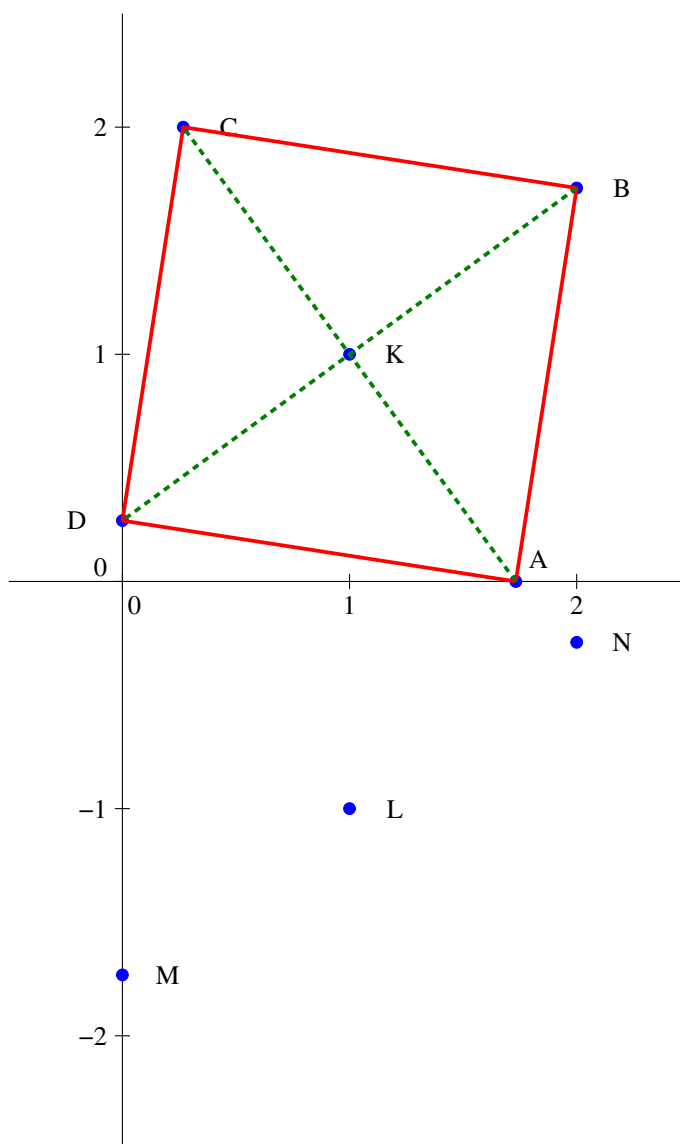
TD n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 septembre 2024

Exercice 1 (5 points)

1. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et admet donc deux racines complexes $z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$.
2. Voici la figure demandée :



3. (a) Si N est symétrique de M par rapport à L , alors $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LN}$. En termes d'affixes complexes, on a donc $z_L - z_M = z_N - z_L$, donc $z_N = 2z_L - z_M = 2 - 2i + i\sqrt{3} = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
- (b) Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine multiplie simplement les affixes par i , donc $z_A = iz_M = \sqrt{3}$ et $z_C = iz_N = 2 - \sqrt{3} + 2i$.
- (c) c'est encore plus simple, on ajoute juste $2i$ aux affixes : $z_D = z_M + 2i = i(2 - \sqrt{3})$ et $z_B = z_N + 2i = 2 + i\sqrt{3}$.
4. (a) Calculons $\frac{z_D + z_B}{2} = \frac{2i - i\sqrt{3} + 2 + i\sqrt{3}}{2} = 1 + i = z_K$, ce qui prouve que K est bien le milieu de $[BD]$. De même, $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i}{2} = 1 + i = z_K$, donc K est aussi le milieu de $[AC]$.
- (b) Calculons brutalement : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{1 - \sqrt{3} + i}{1 + i(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1 - \sqrt{3} + i}{i(-i + \sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{i} = i$.
- (c) La question 4a montre que les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu, donc que $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, l'égalité démontrée à la question précédente montre que $z_C - z_K = i(z_B - z_K)$. On peut en déduire deux choses : $|z_C - z_K| = |z_B - z_K|$, donc $CK = BK$, ce qui prouve que les diagonales de notre parallélogramme sont de même longueur, et donc que $ABCD$ est en fait un rectangle. Enfin, on peut aussi remarquer que les droites (CK) et (BK) sont perpendiculaires (puisque le vecteur $\overrightarrow{CK}$ a une affixe égale à i fois celle du vecteur $\overrightarrow{BK}$). Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est en fait un carré (c'est cohérent avec la figure).

Exercice 2 (5 points)

1. (a) La fonction f est bien définie et dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ puisque l'expression à l'intérieur du $\ln$ y est toujours strictement positive. De plus, $f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On en déduit directement que $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [f(x)]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$.
- (b) Cette intégrale-ci se calcule directement (si on a été attentif au détail du calcul de dérivée effectué juste avant, on doit s'en rendre compte rapidement) : $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.
2. (a) Si $x \in [0, 1]$, on a, quel que soit l'entier naturel n , $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$. Cette inégalité étant valable sur tout l'intervalle $[0, 1]$, on peut l'intégrer entre 0 et 1 pour obtenir $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 0 (l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, 1]$ est nécessairement positive), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge.
- (b) L'encadrement est assez évident : la fonction carré est croissante sur $[0, 1]$, donc, si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$ également, puis $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$. La fonction racine carrée étant elle-même croissante, on en déduit l'encadrement $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$, qui est même nettement meilleur que celui demandé dans l'énoncé ! En reprenant l'encadrement de l'énoncé, on peut en tout cas affirmer que, sur l'intervalle $[0, 1]$, $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$ (on passe l'encadrement précédent à l'inverse, ce qui change le sens des inégalités, avant

de multiplier par la quantité positive x^n). On peut intégrer ces inégalités pour en déduire que $\frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$. Or, on sait très bien calculer l'intégrale de droite : $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On obtient alors l'encadrement suivant : $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Les deux expressions encadrant u_n ayant une limite nulle, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. (a) Calculons donc $u_{n-2} + u_n$ en mettant tout sous une même intégrale : $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = I_n$.

Pour la deuxième relation, on effectue l'IPP de I_n en posant $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, donc $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (calcul déjà effectué une ou deux fois dans cet exercice) et $v'(x) = x^{n-2}$,

dont une primitive est donnée par $v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$. On obtient $I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 -$

$\int_0^1 \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{u_n}{n-1}$. Autrement dit, en exploitant la première relation

démontrée, $u_n + u_{n-2} = \frac{\sqrt{2} - u_n}{n-1}$, donc $(n-1)u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2} - u_n$, ou encore

$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$, soit exactement la relation souhaitée.

- (b) On a prouvé plus haut que la suite (u_n) était décroissante, donc $u_n \leq u_{n-2}$, et $nu_n + (n-1)u_{n-2} \geq nu_n + (n-1)u_n = (2n-1)u_n$. Combiné avec le résultat de la question précédente, cela donne la majoration $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.

- (c) On peut écrire la majoration précédente sous la forme $2nu_n \leq \sqrt{2} + u_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} + u_n = \sqrt{2}$ puisqu'on a déjà prouvé que la suite (u_n) avait une limite nulle. Or, on peut obtenir une inégalité semblable dans l'autre sens par la même méthode : quitte à décaler les indices de la relation de la question 3.a, on a $(n+2)u_{n+2} + (n+1)u_n = \sqrt{2}$, avec $(n+2)u_{n+2} + (n+1)u_n \leq (n+2)u_n + (n+1)u_n = (2n+3)u_n$. On en déduit que $(2n+3)u_n \geq \sqrt{2}$, et donc que $2nu_n \geq \sqrt{2} - 3u_n$, avec à nouveau un membre de droite dont la limite est égale à $\sqrt{2}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_n = \sqrt{2}$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problème (11 points)

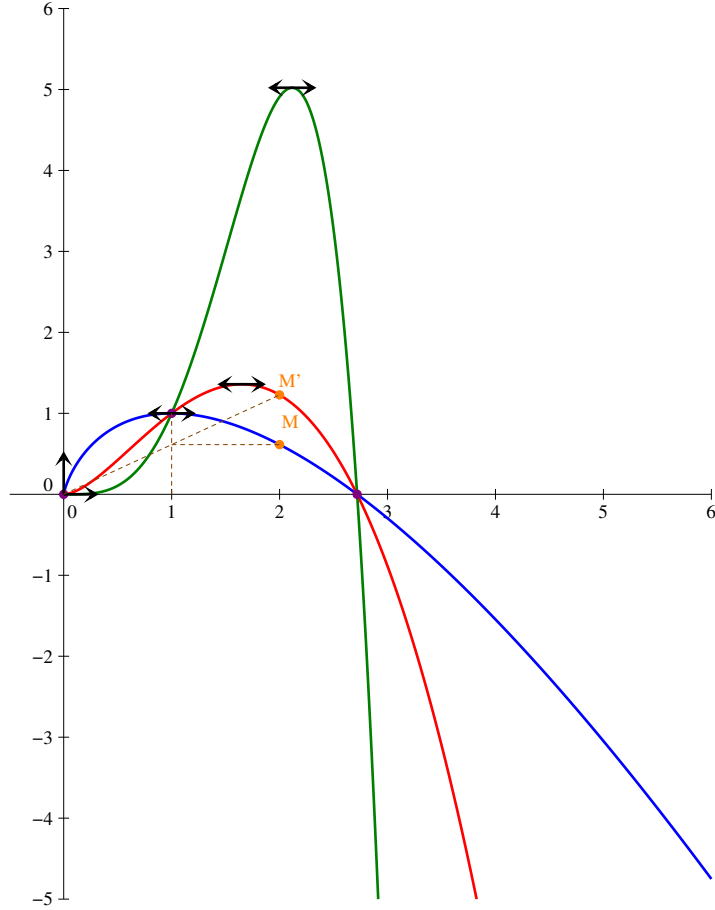
I. Étude générale des fonctions f_n .

1. (a) Il suffit de calculer la limite de nos fonctions en 0 (et même en 0^+ puisqu'elles ne sont pas définies à gauche de 0). Par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$ dès que $n \geq 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$, une simple somme de limites assure que $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$, ce qui prouve la continuité de f_n en 0 puisque l'énoncé impose la valeur $f_n(0) = 0$. Bien entendu, $f_0(x) = 1 - \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = +\infty$. La fonction f_0 n'est donc pas continue en 0.
- (b) Puisque $f_n(0) = 0$, le taux d'accroissement de la fonction f_n en 0 a pour expression $\frac{f_n(x)}{x} = x^{n-1}(1 - \ln(x)) = f_{n-1}(x)$. Les calculs effectués à la question précédente prouvent donc que f_1 n'est pas dérivable en 0 (son taux d'accroissement f_0 y a une limite infinie, il y aura une tangente verticale), alors que toutes les fonctions f_n pour $n \geq 2$ sont bien dérivables, et ont même une dérivée nulle en 0 (leur courbe aura donc une tangente horizontale à l'origine).

- (c) Aucune forme indéterminée ici, on obtient directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ par produit de limites.
2. (a) Calculons $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1 - \ln(x)) - x^n(1 - \ln(x)) = x^n(x - 1)(1 - \ln(x))$. Sur $]0, +\infty[$, le facteur x^n sera toujours positif (et s'annulera en 0), le facteur $x - 1$ est positif quand $x \geq 1$, et le facteur $1 - \ln(x)$ est positif quand $x \leq e$. On en déduit que notre expression est négative quand $x \in]0, 1[$ et quand $x \in]e, +\infty[$, et positive quand $x \in]1, e[$.
- (b) La courbe $(\mathcal{C}_n)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_{n+1})$ sur les intervalles $]0, 1[$ et $]e, +\infty[$, et c'est le contraire sur $]1, e[$. Toutes nos courbes se coupent à l'origine, au point de coordonnée $(1, 1)$ (on calcule facilement $f_n(1) = 1$) et au point de coordonnées $(e, 0)$.
3. (a) Traitons à part le cas de la fonction f_0 , qui est décroissante de façon évidente (puisque la fonction $\ln$ est croissante). Pour $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'_n(x) = nx^{n-1}(1 - \ln(x)) - x^n \times \frac{1}{x} = x^{n-1}(n - n \ln(x) - 1)$. Le facteur x^{n-1} étant positif, cette dérivée est du signe de $n - 1 - n \ln(x)$. Cette expression s'annule lorsque $\ln(x) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, donc pour $x = e^{1-\frac{1}{n}}$. Notre dérivée est positive avant son annulation et négative après, donc f_n est croissante sur $]0, e^{1-\frac{1}{n}}]$, puis décroissante sur $[e^{1-\frac{1}{n}}, +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = e^{1-\frac{1}{n}}$, de valeur $f_n(e^{1-\frac{1}{n}}) = (e^{1-\frac{1}{n}})^n \times \left(1 - 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{e^{n-1}}{n}$. On peut résumer ces calculs ainsi (toujours pour $n \geq 1$) :

x	0	$e^{1-\frac{1}{n}}$	e	$+\infty$
f_n	0	$\frac{e^{n-1}}{n}$	0	$-\infty$

- (b) On sait déjà que $f_n(1) = 1$ et $f_n(e) = 0$. On calcule $f'_n(1) = 1 \times (n-1) = n-1$ et $f'_n(e) = e^{n-1} \times (n - n - 1) = -e^{n-1}$. La tangente en 1 a donc pour équation $y = (n-1)(x-1) + 1 = (n-1)x + 2 - n$, et la tangente en e a pour équation $y = -e^{n-1}(x-e) = -e^{n-1}x + e^n$.
- (c) Quelques valeurs approchées utiles pour le tracé de courbes : le maximum de f_1 est atteint en $e^0 = 1$, et donc de valeur 1, la maximum de f_2 est atteint en $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \simeq 1.6$, de valeur $\frac{e}{2} \simeq 1.35$. Les tangentes aux deux courbes en 1 ont pour équations $y = 1$ (tangente horizontale, normale pour le maximum) et $y = x$; les tangentes en e ont pour équation $y = -x + e$ et $y = -ex + e^2$. On obtient les allures suivantes ($(\mathcal{C}_1)$ en bleu, $(\mathcal{C}_2)$ en rouge, la troisième courbe représentée ici en vert est $(\mathcal{C}_4)$).
4. (a) La droite passant par M et parallèle à l'axe des abscisses est horizontale, elle coupe donc la droite verticale d'équation $x = 1$ au point de coordonnées $(1, f_n(a)) = (1, a^n(1 - \ln(a)))$. La droite (OM') , elle, passe par le point $M'(a, a^{n+1}(1 - \ln(a)))$. Comme elle passe également par l'origine, elle a simplement une équation de la forme $y = cx$, avec $c = \frac{y_{M'}}{x_{M'}} = \frac{a^n(1 - \ln(a))}{a} = a^{n-1}(1 - \ln(a))$. En particulier, pour $x = 1$, $y = a^n(1 - \ln(a))$, elle coupe donc bien les deux autres droites au même point.



- (b) Il suffit de tracer la droite horizontale passant par M , puis de noter son intersection avec la droite verticale d'équation $x = 1$. On trace ensuite la droite reliant l'origine à ce point d'intersection, et cette troisième droite va couper la verticale d'équation $x = a$ (et donc la courbe (C_{n+1})) en M' . Les traits de construction sont indiqués en pointillés marron pour les points d'abscisse 2 de (C_1) et (C_2) mais ce n'est pas extrêmement lisible.

II. Étude d'une suite d'intégrales.

- On a déjà vu lors de la première partie que, sur l'intervalle $[1, e]$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Il suffit d'intégrer cette inégalité pour en déduire que $I_n \leq I_{n+1}$, et donc que la suite (I_n) est croissante.
- Effectuons donc une IPP sur I_n en posant $u(x) = 1 - \ln(x)$, donc $u'(x) = -\frac{1}{x}$, et $v'(x) = x^n$ dont une primitive est donnée par $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $I_n = \left[\frac{x^{n+1}(1 - \ln(x))}{n+1} \right]_1^e + \int_1^e \frac{x^n}{n+1} dx = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^e = -\frac{1}{n+1} + \frac{e^{n+1} - 1}{(n+1)^2} = \frac{e^{n+1} - n - 2}{(n+1)^2}$. Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} = +\infty$, ce qui suffit à assurer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ (tout le reste de la fraction tend vers 0).

III. Étude des solutions des équations $f_n(x) = 1$.

- On a calculé x_n plus haut, il est égal à $e^{1-\frac{1}{n}}$. Quel que soit l'entier $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que $\sqrt{e} \leq x_n < e$, ce

qui suffit à prouver que $x_n \in [1, e]$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e$.

2. Sur cet intervalle, la fonction f_n est continue et strictement décroissante. Comme $f_n(x_n) > f_n(1) = 1$ (puisque la valeur en x_n constitue le maximum de la fonction f_n) et $f_n(e) = 0$, la fonction f_n effectue donc une bijection de l'intervalle $[x_n, e[$ vers l'intervalle $]0, f_n(x_n)[$ qui contient la valeur 1. En particulier, l'équation $f_n(x) = 1$ admet bien une unique solution sur l'intervalle $[x_n, e[$.
3. Par définition, $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n(1 - \ln(\alpha_n)) = 1$. Or, $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1}(1 - \ln(\alpha_n)) = \alpha_n \times f_n(\alpha_n)$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n > 1$ puisque $\alpha_n \geq x_n > 1$. On en déduit donc que $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ (qui vaut 1 par définition de la suite (α_n)). Comme la fonction f_{n+1} est décroissante sur l'intervalle $[\alpha_{n+1}, e]$, on en déduit que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, et donc que la suite (α_n) est bien croissante.
4. Le fait que la suite soit croissante ne sert absolument à rien ici : $x_n \leq \alpha_n \leq e$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e$, donc le théorème des gendarmes assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$.