Devoir Surveillé n° 10 (devoir bilan) : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 juin 2025

Exercice 1

1. Puisque le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1, on a de façon évidente $b_1 = \dfrac{2}{4} = 12$. Ensuite, on applique la formule des probabilités totales correspondant à l'arbre que bon nombre d'entre vous ne manqueront pas de tracer. Les évènements B_1 et $R_1 = \overline{B_1}$ (on tire une boule rouge au premier tirage) forment de façon évidente un système complet d'évènements, et $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(R_1) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$ (si on a tiré une boule bleue au premier tirage, on effectue à nouveau le deuxième tirage dans U_1), et $\mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \dfrac{1}{4}$ (cette fois-ci, on va tirer la deuxième boule dans l'urne U_2). D'après la formule des probabilités totales, on a donc $b_2 = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 14 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$. On peut de même appliquer la formule des probabilités totales pour calculer b_3 : B_2 et R_2 forment un système complet d'évènements, $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{3}{8}$, $\mathbb{P}(R_2) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$, $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{R_2}(B_3) = \dfrac{1}{4}$ (mêmes raisons que tout à l'heure), donc $b_3 = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16} + \dfrac{5}{32} = \dfrac{11}{32}$.
2. On a déjà utilisé plus haut que $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \dfrac{1}{2}$ (on tire dans l'urne U_1). Pour la probabilité conditionnelle dans l'autre sens, on a tous les éléments pour appliquer la formule de Bayes : $\mathbb{P}_{B_3}(B_2) = \dfrac{\mathbb{P}_{B_2}(B_3) \times \mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(B_3)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}}{\frac{11}{32}} = \dfrac{6}{11}$. Les deux évènements ne sont pas du tout indépendants, puisque les probabilités conditionnelles (dans un sens comme dans l'autre) ne sont pas les mêmes que celles des évènements sans supposition.
3. Si on ne tire que des boules bleues, tous les tirages s'effectuent dans l'urne U_1 et chacune des probabilités vaut donc $\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, on a globalement une probabilité égale à $\dfrac{1}{2^n}$ (techniquement, on utilise la formule des probabilités composées). Si on ne tire que des boules rouges, le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1 et tous les suivants dans l'urne U_2, ce qui donne une probabilité globalement égale à $\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{2^{2n-1}}$. Enfin, pour obtenir une alternance stricte des couleurs sur les $2n$ premiers tirages, il y a deux possibilités : soit on commence par tirer une rouge, puis une bleue et ainsi de suite. Dans ce cas les n tirages « impairs » s'effectuent dans U_1 et produisent une boule rouge avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et les n tirages « pairs » dans U_2 produisent une boule bleu avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$, soit une probabilité globale égale à $\dfrac{1}{2^n \times 4^n} = \dfrac{1}{2^{3n}}$. Soit on commence par tirer une boule bleue, et on devra alors ensuite tirer une boule rouge dans l'urne U_1 lors de tous les tirages pairs, avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ à chaque fois, et tirer une boule bleue dans l'urne U_2 pour tous les tirages impairs sauf le premier qui s'est effectué dans U_1. Bref, on a une probabilité deux fois plus forte que dans l'autre cas

(à cause du premier tirage), donc une probabilité globale de $\dfrac{1}{2^{3n-1}}$. Les deux possibilités étant incompatibles, la probabilité demandée est finalement égale à $\dfrac{1}{2^{3n}} + \dfrac{1}{2^{3n-1}} = \dfrac{3}{2^{3n}}$.

4. Il faut de toute façon tirer une boule bleue au tirage n pour que l'évènement U_{n+1} soit réalisé. On a donc $\mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$, d'où, avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(U_n, \overline{U_n})$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}(1-u_n) = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{4}$.

5. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, et son équation de point fixe $x = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$ admet pour solution $x = \dfrac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \dfrac{1}{3}$, et on vérifie que (v_n) est une suite géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}\left(u_n - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}v_n$. De plus, $v_1 = u_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ puisque $u_1 = 1$ (on sait que le premier tirage s'est effectué dans l'urne U_1). La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $\dfrac{2}{3}$, donc $v_n = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4^{n-1}}$ (attention à l'indice de départ), puis $u_n = v_n + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{2n-3}}\right)$. La suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ ayant une limite nulle, on a bien sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

6. La probabilité de tirer dans l'urne U_1 au tirage n est exactement égale (lorsque $n \geqslant 2$) à la probabilité d'avoir tiré une boule bleue au tirage précédent, donc $\forall n \geqslant 1$, $b_n = u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\right)$. On vérifie que les premières valeurs de la suite coïncident avec celles calculées plus haut si on n'est pas sûr de soi. En tout cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$. Au bout d'un grand nombre de tirages, on tirera donc des boules bleues un tiers du temps et des boules rouges deux tiers du temps, et on tirera donc dans l'urne U_1 également un tiers du temps. En fait, si on avait su dès le départ que ces probabilités admettaient des limites, on aurait pu les calculer facilement. Comme $b_n = u_{n+1}$, les deux limites sont nécessairement égales à un même réel l. Et comme la probabilité de tirer une boule bleue dépend directement de l'urne dans laquelle on a tiré, on aurait nécessairement (en passant à la limite dans la formule des probabilités totales) $l = \dfrac{1}{2}l + \dfrac{1}{4}(1-l)$, donc $l = \dfrac{1}{3}$.

7. C'est un calcul de somme géométrique sans grand intérêt : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{2k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{n}{3} + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \frac{n}{3} + \frac{1}{6}\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. Cette somme représente simplement le nombre moyen de boules bleues tirées lors des n premiers tirages. En effet, on peut interpréter la probabilité b_k comme le nombre moyen de boules bleues tirées lors du tirage numéro k (oui, c'est assez abstrait comme concept). En tout cas, cette somme est équivalent quand n tend vers $+\infty$ à $\dfrac{n}{3}$, ce qui confirme qu'on tend à tirer un tiers de boules bleues au bout d'un certain temps.

8. (a) Bien entendu, on a toujours $b_1 = \dfrac{1}{2}$. Les probabilités vont changer à partir du deuxième tirage : on a toujours $\mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \dfrac{1}{4}$ (l'urne U_2 est encore complète), mais désormais $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$ (on tire à nouveau dans l'urne U_1, dans laquelle on a déjà enlevé une boule bleue). On en déduit que $b_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times 14 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{24}$. Pour le calcul de b_3, autant calculer directement la probabilité de chaque cas : $\mathbb{P}(B_1B_2B_3) = 0$ (si on tiré deux boules bleues aux deux premiers tirages, on effectue le troisième tirage dans une urne

U_1 qui a été débarrassée de ses deux boules bleues), $\mathbb{P}(B_1R_2B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(R_1B_2B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ (l'échange des urnes entre les tirages 2 et 3 par rapport au cas précédent ne change pas les probabilités puisque les urnes ont le même contenu), et enfin $\mathbb{P}(R_1R_2B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$. Finalement, $b_3 = \frac{2}{12} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$, soit la même probabilité que b_2. Étonnant, mais pas vraiment facilement explicable.

(b) On s'arrêtera une fois que l'urne dans laquelle on est censés effectuer le tirage suivant sera vide, ce qui ne peut évidemment pas se produire avant d'avoir fait au moins quatre tirages. En fait, ce n'est pas possible non plus au bout de quatre tirages, puisqu'on commence par piocher dans U_1 et qu'on va nécessairement effectuer un tirage dans U_2 avant le cinquième (on finira par tirer une boule rouge dans U_1 au pire au troisième tirage). Pour s'arrêter après cinq tirages, il faudrait qu'une urne soit vide après cinq tirages et qu'on tire dedans au sixième tirage. S'il s'agit de l'urne U_2, il faut donc commencer par les tirages $R_1R_2R_3R_4B_5$ (premier tirage dans U_1, puis on reste dans U_2 pour les quatre suivants), mais dans ce cas le sixième tirage s'effectue dans U_1 donc ça ne marche pas. Si on veut que ce soit U_1 qui soit vide après cinq tirages, il faut donc tirer les deux boules rouges de U_1 parmi ces cinq premiers tirages, ce qui suppose deux des six premiers tirages effectués dans U_2, et donc à nouveau une contradiction. On ne peut donc pas s'arrêter après cinq tirages. C'est par contre possible après six tirages, par exemple après $R_1R_2R_3R_4B_5R_6$ (l'urne U_2 est vide, on ne peut pas effectuer le septième tirage). On fera donc au minimum six tirages. Pour le maximum, on peut facilement tirer toutes les boules (donc huit tirages), par exemple en piochant $BRRRRBBR$.

(c) Comme déjà signalé dans la question précédent, on peut s'arrêter après les six premiers tirages $RRRRBR$, cas où l'urne U_2 est alors vide. Pour terminer aprèx six tirages avec U_2 vide, il faut tirer les deux boules rouges dans U_1 et toutes les boules de U_2 lors de ces six tirages, par contre le tirage de l'unique boule bleue de U_2 peut s'effectuer n'importe quand, ce qui donne les trois autres possibilités $RBRRRR$, $RRBRRR$ et $RRRBRR$. Chacune de ces quatre possibilités a une probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ (l'ordre des probablités change mais les tirages sont les mêmes). Peut-on achever après six tirages avec U_1 vide ? Il faudria pour cela tirer les quatre boules de l'urne U_1, donc tirer les deux boules rouges de cette urne, ce qui impose de faire deux tirages dans U_2 qui ne seront pas successifs. Or, l'un de ces deux tirages au moins donnera une boule rouge qui fera faire un troisième tirage dans U_2, ce qui fera au moins sept tirages au total. Finalement, les quatre cas déjà signalés sont les seuls à six tirages, et la probabilité correspondante vaut donc $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction f_0 (qui est constante égale à 1) a pour limite 1 en $+\infty$. Chacune des fonctions f_k, pour $k \geqslant 1$, a une limite nulle en $+\infty$. Enfin, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Si $\mu \neq 0$, on a donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\mu g + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i \right) = \pm\infty$ selon le signe de μ, ce qui contredit évidemment violemment la nullité de la combinaison linéaire. Il faut donc avoir $\mu = 0$ pour que la combinaison puisse être libre.

(b) En mettant tout au même dénominateur, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (1+x)^{n-i} = 0$, égalité qui doit être valable sur tout l'intervalle $]-1, +\infty[$ où les dénominateurs ne s'annulent jamais. On a donc un polynôme qui admet une grosse infinité de racines, il est nécessairement nul. Mais comme par ailleurs les polynômes $(1+x)^i$ forment une famille échelonnée donc libre lorsque i varie entre 0 et n, cela impsoe que tous les coefficients λ_i soient nuls, ce qui prouve la liberté de la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

(c) La famille $\mathrm{Vect}(g, f_0, \dots, f_n)$ est une base de E_n (génératrice par définition, et libre d'après les deux questions précédentes) et contient $n+2$ vecteurs, donc $\dim(E_n) = n+2$.

2. (a) En gardant les abus de notation de l'énoncé, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, donc $\varphi(g) = \dfrac{1+x}{1+x} = 1 = f_0$. La dérivée de f_0 est nulle donc $\varphi(f_0) = 0$. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $\varphi(f_1) = -\dfrac{1}{1+x} = -f_1$. Enfin, $f_2(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, donc $f_2'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3}$ et $\varphi(f_2) = -\dfrac{2}{(1+x)^2} = -2f_2$.

(b) L'application φ est clairement linéaire : $\varphi(\lambda f + h) = (1+x)(\lambda f + h)' = (1+x)(\lambda f' + h') = \lambda(1+x)f' + (1+x)h'$. De plus, les quatre images calculées à la question précédente appartiennent à l'espace E_2. Toute fonction $f \in E_2$ étant combinaison linéaire de g, f_0, f_1 et f_2, son image sera donc également dans E par linéarité de φ, ce qui prouve que φ est bien un endomorphisme de l'espace E_2.

(c) Si $f \in E$, on peut écrire $f = \lambda_1 g + \lambda_2 f_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2$, donc $\varphi(f) = \lambda_1 f_0 - \lambda_3 f_1 - 2\lambda_4 f_2$. La famille (f_0, f_1, f_2) étant libre, cette image ne peut être nulle que si $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ce qui prouve que $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_1)$. D'après le théorème du rang, l'image de φ est alors de dimension $4 - 1 = 3$, et de façon évidente $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$.

(d) On a déjà calculé les images des quatre fonctions de la base $\mathcal{B}_2$, dont l'expression dans $\mathcal{B}_2$ est triviale : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Un calcul exceptionnellement difficile (du moins pour un élève de petite section de maternelle) donne alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(e) Par définition, $\chi_M = \det(XI_n - M) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = X^2(X+1)(X+2)$ (la matrice étant triangulaire, son déterminant est simplement le produit de ses coefficients diagonaux). Les valeurs propres de M sont les racines de ce polynôme, donc 0, -1 et -2.

(f) Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont simplement les vecteurs du noyau, qu'on a déjà calculé un peu plus haut. Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 doivent vérifier $\varphi(\lambda_1 g + \lambda_2 f_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2) = -\lambda_1 g - \lambda_2 f_0 - \lambda_3 f_1 - \lambda_4 f_2$, ce qui au vu des calculs précédents implique directement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$, donc les vecteurs propres recherchés sont tous les multiples de f_1. De même, les vecteurs propres associés à -1 sont les multiples de f_2. On ne pourra donc jamais constituer une base de E_2 constituée de quatre vecteurs propres (ils sont situés sur trois droites), et φ n'est pas diagonalisable. Par contre, φ^2 est trivialement diagonalisable puisque sa matrice dans la base $\mathcal{B}_2$ est M^2 qui est diagonale.

3. (a) C'est en fait une fausse équation différentielle d'ordre 1 : on cherche simplement toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Cette fonction étant de la forme $u'u$, elle admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x+1)$. On n'oublie pas d'ajouter une constante pour obtenir les autres primitives : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x+1) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$. En particulier, $h_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x+1)$,

puisque cette fonction s'annule en 0.

(b) C'est exactement pareil : une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{\ln^2(x+1)}{1+x}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{6}\ln^3(x+1)$ (cette fois-ci il faut reconnaître une forme $u'u^2$), et les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \frac{1}{6}\ln^3(x+1) + K_2$, avec $K_2 \in \mathbb{R}$. En particulier, $h_2(x) = \frac{1}{6}\ln^3(x+1)$.

(c) On conjecture aisément que $h_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\ln^{n+1}(x+1)$. On le prouve par une récurrence assez triviale. C'est vrai pour $n = 1$, et si on le suppose vrai au rang n, alors $\frac{1}{(n+1)!}\frac{\ln^{n+1}(x+1)}{x+1}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{n+2}\ln^{n+2}(x+1)$, primite qui s'annule par ailleurs en 0, ce qui prouve que $h_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)!}\ln^{n+2}(x+1)$ et achève la récurrence.

Exercice 3

A. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

0. Cette question était numérotée 0 comme le nombre de points qu'elle mériterait de rapporter : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

1. Le calcul des images des polynômes de la base canonique est immédiat : $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$ (avec bien sûr $f(1) = 1$), ce qui donne $M_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit bien sûr d'une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ puisque la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n+1$.

2. C'est une matrice triangulaire ne contenant que des 1 sur la diagonale, donc $\det(M_n) = 1$. En particulier, $\det(M_n) \neq 0$ donc f est un automorphisme.

3. Commençons par réécrire la matrice : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + A$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

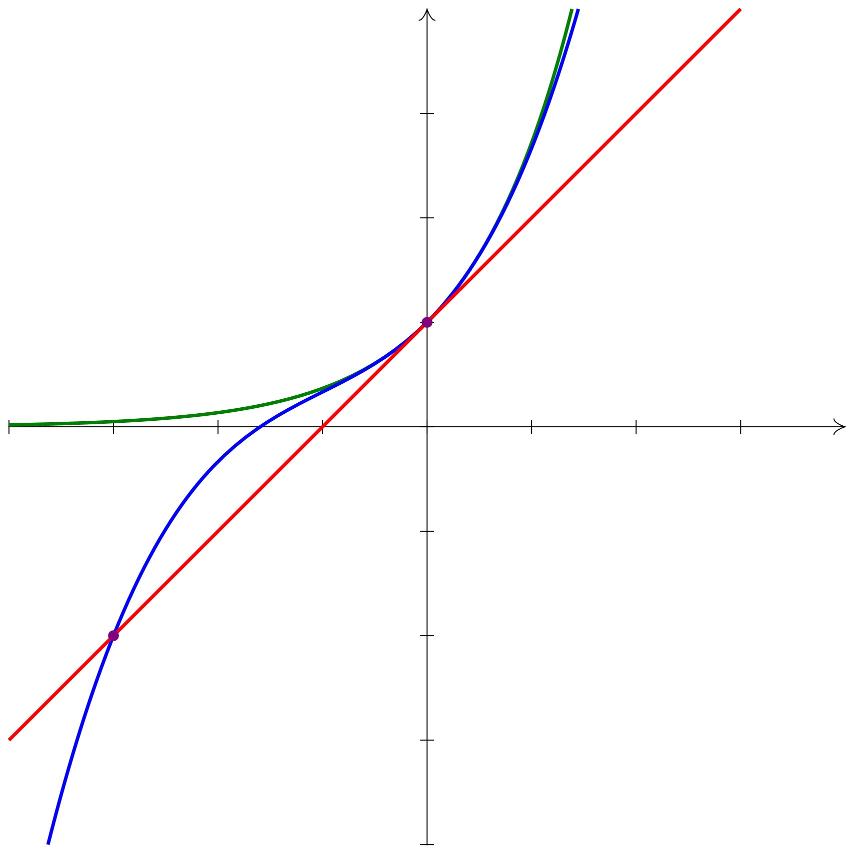
   La matrice A est nilpotente : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$ et $A^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$. Les matrices A et I_3 commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton : $M_2^k = (A+I_3)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i I_3^{k-i} = \sum_{i=0}^{2} \binom{k}{i} A_i = I_3 + kA + \frac{k(k-1)}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -k & k(k-1) \\ 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour le calcul d'inverse, je vais par principe passer par la résolution du système constitué des équations $x - y = a$, $y - 2z = b$ et $z = c$, système triangulaire qui se résout immédiatement : $z = c$, $y = b + 2c$ et $x = a + b + 2c$, donc $M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette formule correspond bien à celle obtenue pour les puissances positives de M_2 : en posant $k = -1$, le coefficient en haut à droite de la matrice par exemple sera égal à $(-1) \times (-2) = 2$. Pour vérifier que ça marche pour tout entier négatif, il suffit de constater que $\begin{pmatrix} 1 & -k & k(k-1) \\ 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & k & k(k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ I_3, ce qui est bien le cas. Le seul coefficient pénible à vérifier est à nouveau celui situé en haut à droite, qui vaut $k(k+1) - 2k^2 + k(k-1) = k^2 + k - 2k^2 + k^2 - k = 0$.

4. C'est évident : f est bijective donc le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$ admet un unique antécédent par f. De plus, les polynômes $\dfrac{X^i}{i!}$ pour i variant entre 0 et n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est une famille échelonnée), dont l'image par la réciproque f^{-1} de l'automorphisme f est donc aussi une base.
5. On a bien sûr $f^{-1}(1) = 1 = Q_0$. Comme $f(X) = X - 1$, $f(X+1) = X$, donc $Q_1 = X + 1$, et enfin $f(X^2) = X^2 - 2X$, donc $f(X^2 + 2(X+1)) = X^2$, donc $Q_2 = X^2 + 2X + 2$.

B. Racines des polynômes P_n.

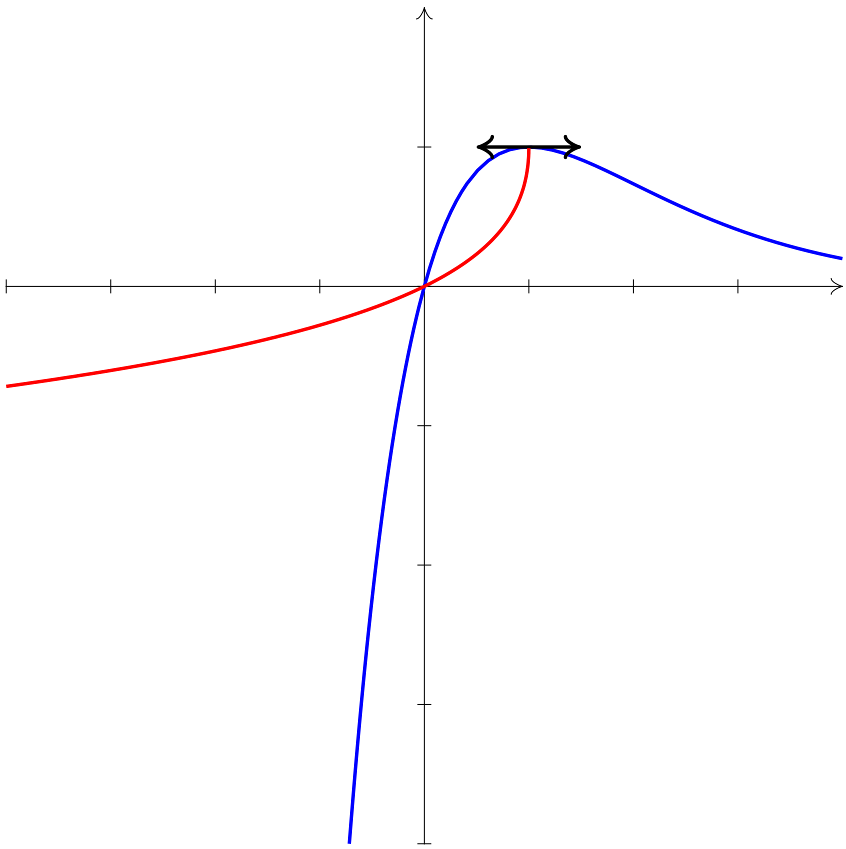
1. Par définition, $P_3(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$. Cette fonction est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P_3'(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$, qui est toujours positif (son discriminant $\Delta = 1 - 2 = -1$ est strictement négatif). De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_3(x) = +\infty$. La fonction $P_1 : x \mapsto x + 1$ est une simple fonction affine qui ne mérite pas d'étude particulière. Notons que $P_3(x) - P_1(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{1}{2}x^2(x+3)$, les deux courbes se coupent donc en $(-3, -2)$ et en $(0, 1)$, avec la courbe de P_3 qui sera au-dessus de celle de P_1 sur tout l'intervalle $[-3, +\infty[$ (la droite est simplement tangente à la courbe de P_3 en 0). Comme $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, on a clairement $P_1(x) \leqslant P_3(x) \leqslant e^x$ sur $[0, +\infty[$. Sur $]-\infty, -3]$, $P_3(x) \leqslant P_1(x) < 0 < e^x$. Reste à déterminer la position relative des courbes de l'eponentielle et de P_3 sur $[-3, 0]$. Si on est courageux, on pose $d(x) = e^x - P_3(x)$, fonction qui s'annule en 0, et dont la dérivée, la dérivée seconde et la dérivée tierce s'annulent en 0 (calculs triviaux). Comme $d^{(4)}(x) = e^x > 0$, on en déduit que $d^{(3)}$ est négative sur $\mathbb{R}_-$, puis que d'' est positive sur ce même intervalle, que d' y est négative et enfin que d y est positive. La courbe de l'exponentielle est donc au-dessus de celles de P_1 et de P_3 sur $\mathbb{R}$ tout entier.



2. On va montrer simultanément la propriété « P_{2n} n'admet pas de racine réelle et P_{2n+1} admet une unique racine réelle ». Pour $n = 0$ c'est bien le cas : $P_0 = 1$ n'a pas de racine, et $P_1 = X + 1$ s'annule uniquement en -1. Supposons la propriété vérifiée pour un entier n, alors $P'_{2n+2} = P_{2n+1}$ a une dérivée qui change de signe exactement une fois en α_{2n+1}, et comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P_{2n+2}(x) = +\infty$, la fonction P_{2n+2} est donc décroissante puis croissante, admettant un minimum en α_{2n+1}. Or, $P_{2n+2} = \dfrac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} + P_{2n+1}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{2n+2}(x) \geqslant P_{2n+1}(x)$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Or, $\alpha_{2n+1} \neq 0$ puisque $P_{2n+1}(0) = 1$, donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) > 0$, ce qui assure que P_{2n+2} ne s'annule jamais. On en déduit que P_{2n+3} a une dérivée (égale à P_{2n+2}) strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc est une fonction strictement croissante, et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les limites étant à nouveau triviales à calculer). Cela suffit à affirmer qu'elle s'annule exactement une fois, ce qui achève l'hérédité de notre récurrence.
3. Par définition, $P_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = P_{2n+3}(2n+3) = 0$. Or, $P_{2n+3} = P_{2n+1} + \dfrac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dfrac{X^{2n+3}}{2n+3} = P_{2n+1} + \dfrac{X^{2n+2}(X+2n+3)}{(2n+3)!}$. On en déduit que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+1}) = \dfrac{\alpha_{2n+1}^{2n+2}(\alpha_{2n+1}+2n+3)}{(2n+2)!} > 0$ puisque $\alpha_{2n+1} > -2n-1+2n+3 > 2$. Autrement dit, $P_{2n+3}(\alpha_{2n+1}) > P_{2n+3}(\alpha_{2n+3})$ La fonction P_{2n+3} étant strictement croissante (cf question précédente), on en déduit que $\alpha_{2n+1} > \alpha_{2n+3}$, ce qui prouve bien la décroissance de la suite.
4. Si α_{2n+1} converge vers l, alors la suite est bornée en valeur absolue par un réel M, et $|P_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) - e^l| \leqslant |P_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) - e^{\alpha_{2n+1}}| + |e^{\alpha_{2n+1}} - e^l|$. Par définition de la limite, le deuxième terme de cette majoration tend vers 0. Mais le premier vaut $\left|\displaystyle\sum_{k=2n+2}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}^k}{k!}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=2n+2}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$, qui tend également vers 0 comme reste d'une série exponentielle convergente.

Quitte à prendre des valeurs de n suffisamment grandes, on peut donc rendre chacun de ces deux termes inférieurs à n'importe quel $\varepsilon > 0$ fixé, et on en déduit bien la convergence de $(P_{2n+1}(\alpha_{2n+1}))$ vers $e^l > 0$. Dans la mesure où cette suite est par définition nulle, c'est une contradiction flagrante. La suite (α_{2n+1}) ne peut donc pas être minorée (sinon, étant décroissante, elle convergerait), et a pour limite $-\infty$.

5. (a) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$, donc h est croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante ensuite, admettant pour maximum $h(1) = 1$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$. Une allure de la courbe (en bleu) :



(b) La fonction h est strictement croissante et continue sur $]-\infty, 1]$, donc bijective. La courbe de sa réciproque g s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en rouge sur le graphique précédent).

(c) La fonction h étant bijective de $]-\infty, 1]$ vers lui-même, l'équation $h(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty, 1]$. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, h est positive et ne prend pas la valeur -1. Pour obtenir l'encadrement de β, on calcule $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{e\sqrt{e}}{2} < -1$, et $h\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{5}{4}} = -e^{\frac{5}{4}-\ln(4)}$. Or, $\ln(4) = 2\ln(2) \simeq 1.38 > \dfrac{5}{4}$, donc $e^{\frac{5}{4}-2\ln(2)} < 1$ et $h\left(-\dfrac{1}{4}\right) > -1$. Comme h est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et que $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) < h(\beta) < h\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, on en déduit l'encadrement demandé.

6. (a) C'est un calcul brutal (on rappelle que la série exponentielle converge sur $\mathbb{C}$, aucun problème donc à manipuler des sommes infinies ici) : $1 - e^{-nz}Q_n(z) = 1 - e^{-nz}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k z^k}{k!} =$

$$1 - e^{-nz}\left(e^{nz} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!}\right) = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!} = (e^{-z})^n z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^{k-n}}{k!}$$
$$= (ze^{1-z})^n e^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^{k-n}}{k!}.$$

(b) L'hypothèse faite sur z implique que $|(ze^{1-z})^n| \leqslant 1$, donc par inégalité triangulaire, $|1 - e^{-nz}Q_n(z)| \leqslant e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k |z|^{k-n}}{k!} \leqslant e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^{-n}(e^n - Q_n(1)) = 1 - e^{-n}Q_n(1)$.

(c) Si on suppose $Q_n(z) = 0$, alors l'inégalité précédente devient $1 \leqslant 1 - e^{-n}Q_n(1)$, ce qui ne peut être vrai que si $Q_n(1) \leqslant 0$, ce qui est complètement faux. Par l'absurde, Q_n ne peut donc pas s'annuler en z.

7. On a déjà admis que $-n < \alpha_n$, et la décroissance de la suite assure que $\alpha_n < \alpha_1 = -1$. De plus, $\frac{\alpha_n}{n}$ est racine de Q_n (par définition), donc vérifie soit $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| > 1$, soit $\left|h\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right| > 1$ d'après la question précédente. La première hypothèse étant exclue, on a $\left|h\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right| > 1$, mais les variations de la fonction h qu'on a étudiées plus haut imposent alors $\frac{\alpha_n}{n} < \beta$, donc $\alpha_n < n\beta$.

8. (a) La formule de Taylor reste intégral appliquée en 0 s'écrit $e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \int_0^u \frac{(u-x)^n}{n!} e^x \, dx$. On pose $t = u - x$ dans l'intégrale, ce qui change les bornes en u et 0 et l'élément différentiel en $dt = -dx$, pour obtenir $e^u = P_n(u) - \int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{u-t} \, dt = P_n(u) - e^u \int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt$. On en déduit que $P_n(u) = e^u \left(1 + \int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt\right)$, et la formule demandée en divisant par e^u.

(b) La question précédente, appliquée pour $u = \alpha_n$, donne $\int_{\alpha_n}^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt = -1$. On calcule alors $\int_{\gamma_n}^0 (h(t))^n \, dt = \int_{\gamma_n}^0 t^n e^{n-nt} \, dt = e^n \int_{\gamma_n}^0 t^n e^{-nt} \, dt$. En posant $x = nt$, donc $dx = ndt$, les bornes de l'intégrale deviennent α_n et 0, et $\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n \, dt = \frac{e^n}{n} \int_{\alpha_n}^0 \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \, dx = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_{\alpha_n}^0 x^n e^{-x} \, dx = \frac{e^n}{n^{n+1}} \times (-n!) = -\frac{e^n n!}{n^{n+1}}$.

(c) En exploitant Stirling, la valeur de l'intégrale calculée juste au-dessus est équivalente à $-\frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^n}{e^n n^{n+1}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ qui tend vers 0.

(d) L'intégrale prise entre γ_n et β est, en valeur absolue, inférieure à celle calculée entre γ_n et 0 (la fonction h étant négative sur tout l'intervalle $[\gamma_n, 0]$ puisque $h(0) = 0$), donc elle tend elle aussi vers 0 (d'après le théorème des gendarmes si on tient à être très rigoureux). Or, sur l'intervalle $[\gamma_n, \beta]$, $h(x) \leqslant -1$, donc $|h(x)^n| \geqslant 1$, et $\left|\int_{\gamma_n}^{\beta} h(x)^n \, dx\right| = \int_{\gamma_n}^{\beta} |h(x)^n| \, dx \geqslant \beta - \gamma_n$ (la fonction est de signe constant sur l'intervalle, d'où le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire intégrale). Comme cette intégrale a une limite nulle, on en déduit que $\underset{n \to +\infty}{\gamma_n} = \beta$ (encore par théorème des gendarmes), donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \beta$ et $\alpha_n \sim n\beta$ (équivalent valable seulement pour des entiers impairs, rappelons-le).