Devoir Maison n° 12 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 juin 2025

ESSEC 2016, le retour

Bien entendu, je vous renvois au corrigé du DS9 pour les deux premières parties de ce superbe problème, et je reprends donc directement le corrigé à la partie III.

III. Développement eulérien de la fonction sinus.

1. La condition $x \in [0,1[$ est indispensable pour que le terme génaral de la série soit défini pour tout entier $n \geqslant 1$ (si $x \geqslant 1$, le terme d'indice $n = 1$ n'est pas défini). Même sans cette hypothèse, on aura toujours à x fixé $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^2}{n^2} = 0$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right) \sim -\dfrac{x^2}{n^2}$. La série $\sum \alpha_n$ est donc une série à termes négatifs dont le terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente, elle converge.

2. (a) La linéarité de l'intégrale permet d'inverser l'intégration et la somme finie, donc $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt = \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt = \sum_{n=1}^N [\ln(n^2-t^2)]_0^x = \sum_{n=1}^N (\ln(n^2-x^2) - \ln(n^2)) = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \beta_N(x)$.

   (b) Les propriétés vues dans la partie I, et notamment le fait que $\varphi(x) \underset{x\to0}{=} \dfrac{1}{x} + o(1)$, montrent qu'on peut prolonger la fonction $t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{1}{t}$ par continuité en 0. Comme cette fonction est par ailleurs définie et continue sur $]0,x]$ lorsque $x \in]0,1[$, le calcul d'intégrale est simplement celui d'une fonction continue sur un segment, qui ne pose pas de problème.

   (c) Puisque $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2}$, on peut effectuer le calcul suivant (toutes les séries manipulées sont convergentes, comme ça a été prouvé au début du problème) : $\displaystyle\left|\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\,dt - \int_0^x \sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt\right| = \left|\int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt\right|$ par inégalité triangulaire. Or, la somme obtenue peut être majorée, lorsque $t < 1$, par $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-1}$. En sortant ce qui ne dépend pas de t de l'intégrale, notre expression initiale est donc majorée par $\displaystyle\sum_{n=N+1} \frac{1}{n^2-1} \times \int_0^x 2t\,dt = x^2 \sum_{n=N+1} \frac{1}{n^2-1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ puisque $x < 1$.

   (d) Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2-1}$ converge, son reste $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ a une limite nulle quand N tend vers $+\infty$. L'inégalité de la question précédente prouve alors que $\displaystyle\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\,dt = \lim_{N\to+\infty} \beta_N(x) = \beta(x)$.

(e) On rappelle qu'on a prouvé il y a fort longtemps dans ce même problème que $\varphi(t) = \dfrac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$, une fonction qu'on peut intégrer aisément puisqu'elle est de la forme $\dfrac{u'}{u}$. Seul problème, cette expression n'est pas valable en 0. On va donc tricher un peu en calculant, pour $\varepsilon \in]0,x]$, la valeur de $\displaystyle\int_\varepsilon^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\,dt = \int_\varepsilon^x \frac{\pi\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{t}\,dt = [\ln(\sin(\pi t)) - \ln(t)]_\varepsilon^x = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\pi\varepsilon}{\varepsilon}\right)$. Le terme de droite est équivalent en 0 à $\dfrac{\pi\varepsilon}{\varepsilon} = \ln(\pi)$, donc $\displaystyle\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\,dt = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) - \ln(\pi) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

3. (a) La suite $(P_n(x))$ est constituée de termes positifs (on multiplie entre eux des termes qui sont toujours positifs), donc minorée par 0. De plus, elle est clairement décroissante : $P_{n+1}(x) = P_n(x) \times \left(1 - \dfrac{x^2}{(n+1)^2}\right)$, avec $1 - \dfrac{x^2}{(n+1)^2} \leqslant 1$. La suite converge donc (théorème de convergence monotone).

(b) Puisque $e^{\beta_n(x)} = e^{\sum_{k=1}^n \alpha_k(x)} = \displaystyle\prod_{k=1}^n e^{\alpha_k(x)} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = \frac{P_n(x)}{\pi x}$ (si $x > 0$, mais le cas $x = 0$ est de toute façon trivial), un simple passage à la limite (la fonction exponentielle étant continue, la composition ne pose aucun problème, et tout est convergent d'après les questions précédentes) donne $\pi x e^{\beta(x)} = P(x)$. Et le résultat de la question 2.e permet d'affirmer que $\pi x e^{\beta(x)} = \sin(\pi x)$.

(c) En notant $n_0 = Ent(x)$, la suite $(P_n(x))$ est monotone à partir du rang $n_0 + 1$ pour la même raison que ci-dessus (on passe de $P_n(x)$ à $P_{n+1}(x)$ en multipliant par un nombre compris entre 0 et 1). La monotonie dépend simplement du signe de $P_{n_0+1}(x)$. La suite étant par ailleurs majorée par 0 à partir du rang $n_0 + 1$ quand elle est croissante à partir de ce reng (et minorée par 0 quand elle est décroissante), elle converge.

(d) On peut écrire un peu différemment nos produits : $P_n(x) = \dfrac{\pi x}{(n!)^2}\displaystyle\prod_{k=1}^n (k^2 - x^2) = \frac{\pi x}{(n!)^2}\prod_{k=1}^n (k+x)\prod_{k=1}^n (k-x)$. On en déduit que $P_n(x+1) = \dfrac{\pi(x+1)}{(n!)^2}\displaystyle\prod_{k=1}^n (k+x+1)\prod_{k=1}^n (k-x-1) = \frac{\pi(x+1)}{(n!)^2}\prod_{k=2}^{n+1}(k+x)\prod_{k=0}^{n-1}(k-x) = P_n(x) \times \frac{x+1}{x} \times \frac{n+1+x}{1+x} \times \frac{-x}{n-x} = -\frac{n+1+x}{n-x}P_n(x)$.

(e) À x fixé, l'égalité est précédente est valable pour tous les entiers n vérifiant $n \geqslant Ent(|x|) + 1$. En particulier, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité pour obtenir directement $P(x+1) = -P(x)$. Trivialement, on a donc $P(x+2) = -P(x+1) = P(x)$, ce qui prouve que P est 2-périodique.

(f) On sait déjà que $P(x) = \sin(\pi x)$ si $x \in [0,1[$. Si $x \in]-1,0[$, on peut désormais écrire $P(x) = -P(x+1)$, avec $x + 1 \in]0,1[$, donc $P(x) = -\sin(\pi(x+1)) = -\sin(\pi x + \pi) = \sin(\pi x)$, ce qui prouve notre égalité sur $]-1,1[$. Elle reste vraie pour $x = 1$ puisque les deux fonctions s'annulent à cet endroit (le terme numéro 1 du produit définissant P_n est nul). On a donc deux fonctions 2-périodiques qui coïncident sur toute une période, elles sont égales.

IV. Un autre développement du sinus.

1. Même pas besoin d'inviquer le critère spécial des séries alternées, on est en présence de séries absolument convergentes, puisque la valeur absolue de leur terme général est équivalent à $\dfrac{|x|}{n^2}$, qui est encore et toujours le terme général d'une série de Riemann convergente.

2. Pour calculer l'intégrale, une somme serait nettement plus pratique qu'un produit, on va donc appliquer la formule bien connue (transformation somme-produit) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$. On en déduit que $\lambda_n(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos((x+n)t) + \cos((x-n)t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+x)t)}{n+x} - \frac{\sin((n-x)t)}{n-x}\right]_0^\pi = \frac{\sin((n+x)\pi)}{2(n+x)} + \frac{\sin((n-x)\pi)}{2(n-x)} = \frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{2(n+x)} - \frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{2(n-x)}$ en exploitant l'imparité du sinus et le fait qu'il change de signe quand on ajoute π à son argument (il est donc multiplié

par $(-1)^n$ quand on ajoute n fois π). Finalement, $\lambda_n(x) = \dfrac{(-1)^n \sin(\pi x)}{2}\left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n-x}\right) = \dfrac{(-1)^n \times (-2x)\sin(\pi x)}{2(n^2-x^2)} = \sin(\pi x) v_n(x)$.

3. (a) Dans ce cas, tous les cosinus dans la somme sont égaux à 1, donc $C_n(2p\pi) = n$. Que vaut $C_n(t)$ lorsque $t = 2p\pi$, avec p entier relatif ?

   (b) Un calcul classique à faire à coups de formules d'Euler et de sommes géométriques de raisons complexes : $C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i(e^{i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{(2n+1)t}{2}})}{2\sin(\frac{t}{2})}\right) = \frac{-\sin(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}$.

   (c) Il est plus simple ici de partir de la définition initiale de C_n : $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\ dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(kt)\ dt = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0$ (tous les termes de la somme sont nuls).

4. Là encore, c'est un résultat classique (qu'on trouve sous une forme légèrement différente dans vos feuilles d'exercices), qui se démontre simplement par IPP quand la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$: on pose $u(t) = F(t)$, donc $u'(t) = F'(t)$, et $v'(t) = \sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right)$ qu'on intègre en $v(t) = -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right)$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\ dt = \left[-\frac{2F(t)\cos((2n+1)\frac{t}{2})}{2n+1}\right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi F'(t)\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)$. En notant M_1 la valeur maximale prise par $|f(t)|$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, et M_2 celle prise par $|f'(t)|$ sur ce même intervalle (les deux fonctions étant supposées continues, le théorème du maximum nous assure l'existence de ces valeurs), on peut majorer assez brutalement tout ça (à coups d'inégalités triangulaires) par $\dfrac{4M_1}{2n+1} + \dfrac{2M_2\pi}{2n+1}$ (les fonctions trigonométriques ayant été simplement majorées en valeur absolue par 1), expression qui a clairement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$, ce qui suffit à conclure.

5. (a) La fonction Φ_x est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par théorèmes généraux, seule l'annulation du dénominateur en 0 peut poser problème. Mais $\Phi_x(t) = \dfrac{\cos(xt)-1}{\sin(\frac{t}{2})} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2t^2}{2}}{\frac{t}{2}} \sim -x^2 t$, qui a une limite nulle en 0. On peut donc prolonger Φ_x par continuité en 0 en posant simplement $\Phi_x(0) = 0$. Mieux, une fois prolongée, la fonction vérifie $\Phi_x(t) \underset{t\to 0}{=} -x^2t + o(t)$, donc admet un DL à l'ordre 1 en 0. Cela prouve que notre fonction est dérivable en 0, avec $\Phi_x'(0) = -x^2$. Il reste quand même à prouver que la dérivée de Φ_x est continue en 0. Sur $]0,\pi]$, on calcule $\Phi_x'(t) = \dfrac{-x\sin(xt)\sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})(\cos(xt)-1)}{\sin^2(\frac{t}{2})} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{-\frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^2t^2}{4} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4}} \sim -x^2$, qui a bien pour limite $-x^2$ quand t tend vers 0. La fonction Φ_x est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, et donc sur $[0,\pi]$ tout entier.

   (b) C'est complètement trivial, il suffit de remplacer $C_n(t)$ par l'expression calculée en question 3.*b*.

   (c) C'est un calcul brutal : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(xt)\cos(kt)\ dt = \int_0^\pi C_n(t)\cos(kt)\ dt$. Une petite astuce belge en ajoutant et en soustrayant $C_n(t)$ dans l'intégrale, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x) = I_n + \int_0^\pi C_n(t)(\cos(kt)-1)\ dt = I_n + \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2}(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t)(\cos(xt)-1)\right)\ dt$ en exploitant la question précédente. Il ne reste plus qu'à séparer tout ça et calculer les intégrales qui se calculent : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x) = I_n - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(xt)\ dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\ dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\ dt = I_n - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\ dt = I_n - \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\ dt$, soit exactement ce qu'on voulait obtenir.

6. (a) On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente : $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x) \sin(\pi x) = \sin(\pi x)\psi(x)$ en reprenant le résultat de la question 2. Dans le membre de droite, $I_n = 0$ peut disparaître sans problème, et l'intégrale ignoble faisant intervenir $\Phi_x(t)$ a une limite nulle d'après la question 4. Il reste donc simplement $\psi(x)\sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}$.

(b) Sur l'ensemble D, $\sin(\pi x)$ ne s'annule jamais donc (équation précédente) $\psi(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2\sin(\pi x)}$, puis $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2\psi(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.