Révisions pour le devoir bilan : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2024

Exercice 1

1. Les petites valeurs de n sont à isoler : pour $n = 0$, on a bien sûr $X_0 = 0$ (on n'a pas encore effectué d'échanges, on est donc dans la situation initiale), donc $X_0(\Omega) = \{0\}$. De même, après un échange, on sait avec certitude qu'il y aura une boule verte dans l'urne U_1 (on a forcément échangé une boule bleue avec une verte) donc $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $X_1 = 1$. Ensuite, on peut augmenter ou diminuer le nombre de boules vertes d'une unité (sans dépasser 0 ou 3 bien sûr) à chaque échange, ou le laisser fixe si on échange deux boules de la même couleur. On aura donc $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $\forall n \geqslant 3$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. On l'a déjà dit, la variable X_1 est constante égale à 1. Pour X_2, les probabilités des trois valeurs possibles se calculent directement à partir de la situation connue après le premier échange :

   - on aura $X_2 = 0$ seulement si on pioche la seule boule verte de l'urne U_1 pour l'échanger avec la seule boule bleue de l'urne U_2, donc avec une probabilité $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$
   - on aura $X_2 = 1$ si on échange deux boules de la même couleur, soit la boule verte de U_1 avec une des deux vertes de U_2, soit une des deux bleues de U_1 avec la bleue de U_2, donc avec probabilité $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$.
   - on aura $X_2 = 2$ si on échange une des deux boules bleues de U_1 avec une des deux boules vertes de U_2, donc avec probabilité $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

   Résumons la loi de X_2 dans un joli tableau :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

   On calcule bien sûr aisément $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{4+8}{9} = \dfrac{4}{3}$, puis $\mathbb{E}(X_2^2) = \dfrac{4+16}{9} = \dfrac{20}{9}$, ce qui permet via la formule de König-Huygens d'obtenir $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{E}(X_2)^2 - \mathbb{E}(X_2)^2 = \dfrac{20}{9} - \dfrac{16}{9} = \dfrac{4}{9}$. Ce n'était pas demandé, mais on constate que l'écart-type est pour une fois sympathique : $\sigma(X_2) = \dfrac{2}{3}$.

   Il est temps de passer à X_3, où le calcul des probabilités est nettement plus pénible :

   - on aura $X_3 = 0$ si $X_2 = 1$ et qu'on échange la boule verte de U_1 avec la bleue U_2, donc avec une probabilité $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{81}$ (il faut bien sûr tenir compte de la probabilité d'avoir $X_2 = 1$ avant d'effectuer les tirages).
   - on aura $X_3 = 3$ seulement si $X_2 = 2$ et qu'on échange la seule boule bleue de U_1 avec la seule verte de U_2, ce qui donne à nouveau une probabilité $\dfrac{4}{81}$

- on aura $X_3 = 1$ à chaque fois que $X_2 = 0$, avec probabilité $\frac{1}{9}$, mais aussi quand $X_2 = 1$ et qu'on échange deux boules de même couleur, soit une probabilité de $\frac{4}{9} \times 49 = \frac{16}{81}$, et enfin quand $X_2 = 2$ et qu'on échange une des deux vertes de U_1 avec une des deux bleues de U_2, donc avec une probabilité de $\frac{4}{9} \times 49 = \frac{16}{81}$. Au total, on obtient une probabilité de $\frac{9+16+16}{81} = \frac{41}{81}$.
- enfin, on peut se contenter d'une soustraction pour $X_3 = 2$: $1 - \frac{4}{81} - \frac{4}{81} - \frac{41}{81} = \frac{32}{81}$. On peut bien sûr retrouver cette valeur directement, en distinguant cette fois-ci deux cas, qui ont chacun pour probabilité $\frac{16}{81}$.

Résumons la loi de X_3 dans un joli tableau :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$\frac{4}{81}$	$\frac{41}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{4}{81}$

On achève cette longue question avec un peu de calcul : $\mathbb{E}(X_3) = \frac{41+64+12}{81} = \frac{117}{81} = \frac{13}{9}$, puis $\mathbb{E}(X_3^2) = \frac{41+128+36}{81} = \frac{205}{81}$, et un coup de König-Huygens pour terminer : $\mathbb{V}(X_3) = \frac{205}{81} - \frac{169}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$. Ah ben tiens, on a encore une fois $\sigma(X_3) = \frac{2}{3}$.

3. Le raisonnement a déjà été détaillé en question 2, $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{4}{9}$. La question 2 permet d'ailleurs aussi d'affirmer que $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{4}{9}$, et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{9}$. On calcule de même $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{4}{9}$, $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \frac{4}{9}$ et $\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{9}$. Enfin, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = 1$, et $\mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = 1$. Les autres probabilités conditionnelles sont nulles.
4. Il s'agit en fait d'appliquer la formule des probabilités totales au système complet constitué par les quatre évènements dont les probabilités forment le vecteur C_n pour obtenir des relations de récurrence. Par exemple, $\mathbb{P}_{X_{n+1}=1} = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) \times \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) \times \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) \times \mathbb{P}(X_n = 2) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n = 2)$. De même pour les autres probabilité, ce qu'on peut effectivement résumer par l'égalité matricielle demandée, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$.
5. C'est une récurrence débile : $C_0 = I_4 \times C_0 = A^0 C_0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, alors $C_{n+1} = AC_n = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$. On connaît la situation initiale : $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. Calcul brutal en exploitant les relations de récurrence et une petite astuce : $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + 2\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) + 3\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{4}{9}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{8}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{8}{9}\mathbb{P}(X_n = 2) + 2\mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{4}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{5}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) + 2\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) + 3\mathbb{P}(X_n = 3)) = 1 + \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n)$. La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ est donc arithémtico-géométrique. Son équation de point fixe $x = \frac{1}{3}x + 1$ a pour solution $x = \frac{3}{2}$,

on pose donc $u_n = \mathbb{E}(X_n) - \frac{3}{2}$ et on vérifie que (u_n) est une suite géométrique : $u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}) - \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n) - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_n$. Comme $u_0 = -\frac{3}{2}$, on en déduit que $u_n = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3^n}$, puis $\mathbb{E}(X_n) = u_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

7. La limite demandée vaut de façon évidente $\frac{3}{2}$. Cela signifie qu'après un grand nombre de tirages on tend à une situation d'équilibre entre les deux urnes, avec en moyenne $\frac{3}{2}$ boules vertes dans chaque urne (et la même chose pour les boules bleues bien entendu).

Exercice 2

I. Étude d'une fonction.

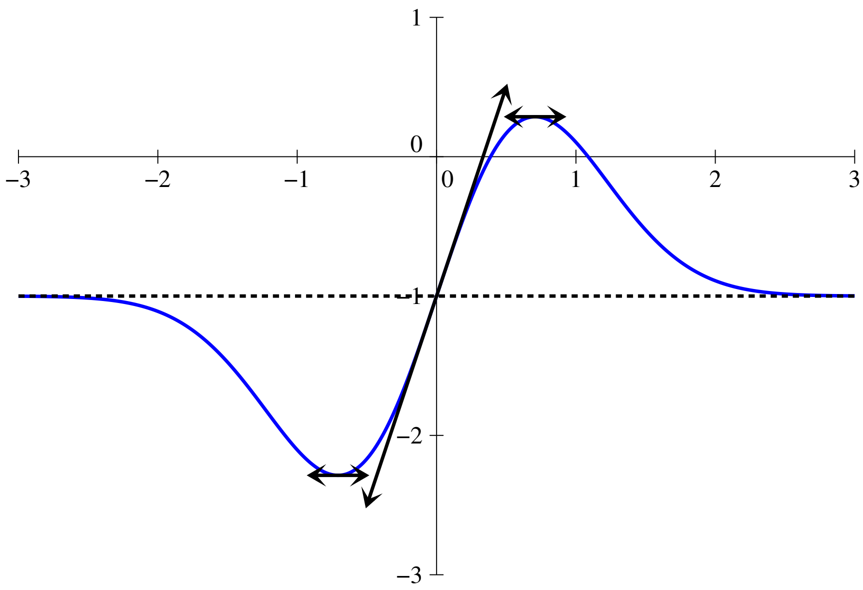
1. La fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, donc en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, et sera positive entre ces deux racines. Calculons les valeurs des extrema correspondants : $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{3}{\sqrt{2e}} - 1 \simeq -2\times 0.6 - 1 \simeq -2.2$ en utilisant les valeurs données par l'énoncé. De même, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2e}} - 1 \simeq 0.2$. Une croissance comparée classique donne $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{\sqrt{2e}} - 1$	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{2e}} - 1$	$\searrow$	-1

2. Calculons donc (f' est bien entendu dérivable) : $f''(x) = -6xe^{-x^2} - 12xe^{-x^2} + 12x^3e^{-x^2} = 6x(2x^2-3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule donc pour $x = 0$, et lorsque $x^2 = \frac{3}{2}$, donc pour $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. En particulier, le point d'abscisse 0 sera un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (la dérivée seconde y change de signe).

3. En composant le DL classique de l'exponentielle par $-x^2$ qui tend vers 0, on a $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$, donc $f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + o(x^3)$. En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation $y = 3x - 1$, et comme $f(x) - (3x-1) \sim -3x^3$, la courbe sera en-dessous de sa tangente à droite de 0, et au-dessus à gauche de 0, ce qui confirme qu'on a un point d'inflexion en 0.

4. Voici une belle allure de courbe :



II. Une équation différentielle.

1. L'équation (H_n) est une équation linéaire du premier ordre, qu'on peut normaliser sous la forme $y' - \dfrac{n-2x^2}{x}y = 0$. Il faut effectivement résoudre séparément sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{n-2x^2}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto n\ln(x) - x^2$, donc les solutions de (H_n) sur cet intervalle sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{n\ln(x)-x^2} = Kx^ne^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. La fonction constante égale à -1 étant solution triviale de l'équation (E_n) (sur chacun des deux intervalles de résolution), les solutions de (E_n) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $y_+ : x \mapsto Kx^ne^{-x^2} - 1$, avec $K \in \mathbb{R}$. La seule différence qu'on aura sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sera l'obligation d'ajouter une valeur absolue dans le ln, ce qui va transformer le x^n et $(-x)^n$. Si n est pair, ça ne change absolument rien aux formules finales, et si n est impair non plus, quitte à changer le signe de la constante en facteur. Les solutions de (E_n) sur $]-\infty, 0[$ peuvent donc s'écrire sous la forme $y_- : x \mapsto Lx^ne^{-x^2} - 1$, avec $L \in \mathbb{R}$.
2. Il s'agit ici de recoller les fonctions y_+ et y^- obtenues à la question précédente en 0, de façon à avoir une fonction continue et à dérivée continue en 0. Quelques calculs de limites s'imposent :

   - $\lim\limits_{x\to0^+} y_+(x) = \lim\limits_{x\to0^-} y_-(x) = -1$ (indépendamment de la valeur de n), ce qui prouve que chaque fonction y^+ peut être recollée à chaque fonction y^- pour créer une fonction continue en 0 (en posant évidemment $y(0) = -1$ pour faire la jonction).
   - $y'_+(x) = Knx^{n-1}e^{-x^2} - 2Kx^{n+1}e^{-x^2}$, donc pour $n = 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} y'_+(x) = K$ (attention au fait que dans ce cas le facteur x^{n-1} est constant égal à 1). On aura de même (calcul identique) $\lim\limits_{x\to0^-} y'_-(x) = L$, donc le prolongement des deux fonctions en 0 ne sera de classe $\mathcal{C}^1$ que si $K = L$. Autrement dit, les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) sont les fonctions $y : x \mapsto Kx^ne^{-x^2}$.
   - si $n \geqslant 2$, les limites des dérivées sont nulles des deux côtés. Cette fois-ci, on peut recoller n'importe quelle fonction y_+ avec n'importe quelle fonction y_- et conserver une solution de classe $\mathcal{C}^1$. Il y a donc beaucoup plus de solutions, de la forme
   $$y : x \mapsto \begin{cases} Lx^ne^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ Kx^ne^{-x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

III. Étude de deux suites.

1. Calculons : $f_n(0) = -1$ est manifestement strictement négatif, et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$ puisque $e < 3$, donc $\dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{3}$.
2. On a déjà plus ou moins calculé la dérivée de f_n : $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. Tous les facteurs sont positifs sur $[0,+\infty[$, sauf $n - 2x^2$ qui s'annule pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et donc bijective sur cet intervalle. Comme $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \geqslant f(1) > 0$ (par croissance de f_n), la fonction f_n s'annule exactement une fois sur cet intervalle. De plus, la valeur d'annulation u_n vérifie $u_n < 1$ puisque $f_n(1) > 0$. De meme, f_n est bijective sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -1$ (croissance comparée), elle s'annule aussi sur ce deuxième intervalle, en une valeur v_n certainement supérieure à 1 puisqu'elle est minorée par $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
3. L'inégalité $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ suffit à affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. (a) Par définition, $f_n(u_n) = 0$, donc $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$, et $e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$.
   (b) Remplaçons : $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} \times \dfrac{1}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0$ puisque $u_n < 1$.
   (c) On sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$. La fonction f_{n+1} étant croissante sur l'intervalle $[0,1]$ dans lequel se trouvent u_n et u_{n+1}, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$. La suite est donc strictement croissante.
   (d) Il suffit de bidouiller un peu : si $\ln(3) + n\ln(t) = t^2$, alors en passant aux exponentielles $3t^n = e^{t^2}$, donc $3t^n e^{-t^2} = 1$ et $f_n(t) = 0$.
   (e) On va utiliser la question précédente histoire qu'elle ne soit pas là pour rien (mais en fait on n'en a pas besoin). La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite $l \leqslant 1$. Supposons donc que $l < 1$, alors $\underset{n\to+\infty}{n} \ln(u_n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u_n) = -\infty$ (le terme $-u_n^2$ étant borné), ce qui est légèrement contradictoire avec le fait que $g_n(u_n)$ est censé être toujours nul. L'hypothèse est donc absurde, et $l = 1$.
   (f) On remplace tout simplement u_n par $1 + w_n$ dans l'équation $g_n(u_n) = 0$, pour obtenir $\ln(3) + n\ln(1+w_n) - (1+w_n)^2 = 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, on a bien sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. L'équation précédente permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+w_n) = 1 - \ln(3)$. Or, $n\ln(1+w_n) \sim nw_n$ (équivalent classique quand w_n tend vers 0), donc $nw_n \sim 1 - \ln(3)$ et $w_n \sim \dfrac{1-\ln(3)}{n}$.

Exercice 3

1. Normalement pas de réflexion à avoir avant d'écrire la bonne matrice, et surtout dans le bon sens : $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On peut par exemple développer directement par rapport à la dernière colonne : $\det(A) = -3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \times -4 + 2 \times (-7) = 12 - 14 = -2$. Puisque ce déterminant

est non nul, la matrice A est inversible, et f est bijective (c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).

3. Pour le premier noyau, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $x = -2y$, puis en substituant la dernière devient $-3y + 3z = 0$, donc $z = y$. La première équation est alors toujours vérifiée ($4y - y - 3y = 0$), donc $\ker(f + id) = \mathrm{Vect}((-2, 1, 1))$. On procède de même pour le second noyau, avec le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. Cette fois, on obtient $x = -y$, puis $z = y$, et à nouveau une première équation toujours vérifiée, donc $\ker(f - id) = \mathrm{Vect}(-1, 1, 1)$. Puisque chacun des deux noyaux contient des vecteurs non nuls, cela signifie que -1 et 1 sont valeurs propres de f (et les vecteurs obtenus comme base de chacun des noyaux sont des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres).

4. La trace de la matrice A est égale à 2. Si f admet une troisième valeur propre λ, elle sera diagonalisable, et A semblable à une matrice diagonale donc les coefficients non nuls seront égaux aux trois valeurs propres -1, 1 et λ. Cette matrice diagonale aura donc pour trace λ, ce qui impose $\lambda = 2$ puisque la trace de cette matrice doit être égale à la trace de A. Alternativement, le déterminant de cette matrice diagonale sera égal à $-\lambda$ (produit des coefficients diagonaux), et doit être identique à celui de A, ce qui impose aussi $\lambda = 2$. On obtient un vecteur propre correspondant en résolvant un dernier sysyème : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -5x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations, identiques, donnent $y = -2x$, on susbtitue dans la première équation pour obtenir $-3x - 3z = 0$, donc $z = -x$, et $\ker(f - 2\,id) = \mathrm{Vect}(1, -2, -1)$.

5. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B} = ((2, -1, -1), (-1, 1, 2), (-1, 1, 1$ On notera en passant que l'énoncé a légèrement oublié de nous faire vérifier que $\mathcal{B}$ était bien une base, ce qui n'est pas encore évident avec nos connaissances actuelles. Tant pis, ça découlera du fait que la matrice P est inversible, ce qu'on va prouver à la question suivante. On constate que les vecteurs constituant la base $\mathcal{B}$ sont tous les trois des vecteurs propres de f (à un éventuel changement de signe près, ce sont ceux qu'on a obtenus lors de nos diverses résolutions de systèmes), associés respectivement aux valeurs propres -1, 1 et 2, ce qui suffit à obtenir $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puisque $P^{-1}AP$ est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ (formule de changement de base). On notera d'ailleurs cette matrice diagonale D pour les calculs de fin d'exercice.

6. Je propose, comme à mon habitude, de résoudre un système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & a \\ -x & + & y & + & 2z & = & b \\ -x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$. L'opération $L_2 - L_3$ donne immédiatement $z = b - c$, et l'opération $L_1 + L_3$ donne $x = a + c$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans la dernière équation : $y = c + x - z = a - b + 3c$. Finalement, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Un petit calcul matriciel pour conclure : $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ comme prévu.

7. (a) On a très clairement $X_{n+1} = AX_n$ (difficile de trouver quoi que ce soit à justifier ici).
   (b) C'est une récurrence triviale : $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$, et si la formule est vraie au rang n,

alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

(c) On connait la matrice $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il ne reste donc qu'à calculer explicitement A^n. Les questions précédentes ont montré que $P^{-1}AP = D$, donc $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 0 car $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Allez, encore un peu de calcul matriciel pour achever cet exercice légèrement bourrin : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, donc $PD^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n & -1 & -2^n \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 1 & 1 - 2^n & 2(-1)^n + 2^n - 3 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 2^{n+1} - 1 & (-1)^{n+1} + 3 - 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 1 & 2^n - 1 & (-1)^{n+1} + 3 - 2^n \end{pmatrix}$. Enfin, on multiplie par la matrice X_0 et on obtient les expressions suivantes : $u_n = 2(-1)^n - 2^n$, $v_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$ et $w_n = 2^n + (-1)^{n+1}$ (on note en passant que la dernière colonne de la matrice A^n ne sert en fait à rien).