Révisions pour le devoir bilan

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2024

Exercice 1

On considère deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles se trouvent initialement trois boules bleues (pour l'urne U_1) et trois boules vertes (pour l'urne U_2). On effectue plusieurs fois de suite l'opération suivante : on tire au hasard une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 et on échange les deux boules. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes dans l'urne U_1 à l'issue du n-ème échange.

1. Quel est l'univers-image de la variable X_n (on fera attention aux cas particuliers) ?
2. Que vaut la variable X_1 ? Donner explicitement la loi, l'espérance et la variance des variables X_2 et X_3.
3. Calculer, en détaillant le raisonnement effectué, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2)$. Donner sans justification les valeurs des autres probabilités conditionnelles du type $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$ (on se contentera de donner les probabilités non nulles).
4. En notant $C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_n=3) \end{pmatrix}$, déduire de la question précédente l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = AC_n$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = A^n C_0$, et préciser la valeur de C_0.
6. Déterminer une relation de récurrence entre les espérances $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$, puis calculer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n.
7. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$? Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2

On pose pour cet exercice $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$. On rappelle les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$, $\sqrt{2} \simeq 1.4$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

I. Étude d'une fonction.

1. Étudier les variations de la fonction f (on donnera également les limites pertinentes, et on dressera un tableau de variations complet).
2. Calculer $f''(x)$, et résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Qu'en déduit-on pour le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f (qu'on notera désormais $\mathcal{C}_f$) ?
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f en 0, et effectuer l'étude locale de f au voisinage de 0 (on précisera en particulier l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0).
4. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ tenant évidemment compte de tous les calculs effectués.

II. Une équation différentielle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$, et (H_n) l'équation homogène associée.

1. Résoudre l'équation (H_n) puis l'équation (E_n) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Donner toutes les fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation (E_n) (on distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$).

III. Étude de deux suites.

On définit désormais, pour tout entier $n \geqslant 2$, une fonction f_n par $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

1. Quel est le signe de $f_n(0)$? De $f_n(1)$?
2. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$, en déduire que f_n s'annule exactement deux fois sur cet intervalle, en deux réels u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite (v_n) (on justifiera la réponse donnée) ?
4. On cherche à déterminer la limite de la suite (u_n).
   (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite (u_n), puis prouver sa convergence.
   (d) En posant $g_n(t) = \ln(3) + n\ln(t) - t^2$, montrer que les valeurs d'annulation des fonctions f_n et g_n sont les mêmes.
   (e) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\lim u_n = 1$.
   (f) En posant $w_n = u_n - 1$, déterminer un équivalent simple de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On considère dans cet exercice l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-3x - y - 3z, 2x + 3y, 2x + y + 2z) \end{array} \right.$.

1. Donner la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de la matrice A, que peut-on en déduire concernant f ?
3. Déterminer les noyaux $\ker(f + id)$ et $\ker(f - id)$, en précisant une base de chacun d'eux. Que représentent les réels -1 et 1 pour l'application f ?
4. En exploitant l'invariance par similitude de la trace ou du déterminant, « deviner » la troisième valeur propre de f, et déterminer un vecteur propre correpondant à cette troisième valeur propre.
5. On pose désormais $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que représente la matrice P ? Que vaut la matrice $P^{-1}AP$ (aucun calcul nécessaire) ?
6. Calculer tout de même l'inverse P^{-1} de la matrice P, et vérifier la relation donnée à la question précédente.
7. On définit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -3u_n - v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 3v_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n + v_n + 2w_n \end{array} \right.$.

   On posera par ailleurs $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une relation matricielle entre X_{n+1} et X_n.
   (b) Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$.
   (c) Calculer l'expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.