

Chapitre 20 : Fractions rationnelles.

MPSI Lycée Camille Jullian

12 avril 2024

Un mathématicien n'est pas quelqu'un qui passe son temps à faire des calculs, mais qui trouve des techniques pour ne pas avoir à les faire.

ANONYME.

Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.

DAVID HILBERT.

Ce chapitre vient conclure, un peu tard certes, l'étude des ensembles algébriques classiques entrepris au premier semestre. Il aurait techniquement eu sa place dans le prolongement du chapitre consacré aux polynômes, puisqu'on retrouve un bon nombre de caractéristiques communes entre les deux objets (la construction très théorique d'un ensemble correspondant à des « fonctions » assez simples, les structures algébriques sous-jacentes, et même une bonne partie du vocabulaire commun aux deux objets). Mais soyons honnêtes, le principal intérêt pour nous de cette étude sera en fait purement pratique, puisqu'il s'agit avant tout de pouvoir énoncer correctement les principes de la décomposition en éléments simples que nous avons déjà eu l'occasion de pratiquer à quelque occasions, et d'expliquer correctement comment gérer les cas problématiques de cette décomposition.

Objectifs du chapitre :

- savoir effectuer une décomposition en éléments simples efficacement, et maîtriser les applications classiques (calculs de primitives, résolution d'équations différentielles).
- comprendre la construction théorique de l'ensemble des fractions rationnelles, et maîtriser le vocabulaire correspondant.

1 Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

1.1 Définition de $\mathbb{K}(X)$.

Comme toujours dans les chapitres d'algèbre, \mathbb{K} désignera en pratique un des corps usuels \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1. On définit sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ une relation \mathcal{R} par $(P_1, Q_1)\mathcal{R}(P_2, Q_2)$ si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Cette relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalences sont appelées **fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K}** . On note $\frac{P}{Q}$ un élément appartenant à la classe d'équivalence du couple (P, Q) .

Remarque 1. Le fait que \mathcal{R} soit une relation d'équivalence est assez simple : réflexivité et symétrie sont triviales, et la transitivité découle du fait que $\mathbb{K}[X]$ est intègre. En fait, il s'agit simplement de considérer que deux fractions polynômiales qu'on peut simplifier pour obtenir le même résultat sont égales. Par exemple, $\frac{X^2 - 1}{X^2 - 3X + 2}$ et $\frac{X + 1}{X + 2}$ sont deux écritures différentes de la même fraction rationnelle.

Définition 2. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K} est traditionnellement noté $\mathbb{K}(\mathbb{X})$.

Définition 3. On appelle **représentant** d'une fraction rationnelle tout couple (P, Q) appartenant à la classe d'équivalence de $\frac{P}{Q}$. Un tel représentant est **irréductible** si $P \wedge Q = 1$ et Q est unitaire.

Proposition 1. Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible unique.

Démonstration. L'existence est assez triviale, on prend un représentant quelconque, puis on simplifie par $P \wedge Q$ si le pgcd n'est pas déjà égal à 1, et enfin on divise tout par le coefficient dominant de Q pour obtenir un dénominateur unitaire. Pour l'unicité, on suppose comme d'habitude que $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont deux représentants convenables d'une même fraction rationnelle. On a alors par définition $P_1Q_2 = P_2Q_1$, donc Q_1 divise Q_2 (c'est une conséquence du théorème de Gauss sur les polynômes, puisque par hypothèse $Q_1 \wedge P_1 = 1$), et de même Q_2 divise Q_1 . Les deux polynômes Q_1 et Q_2 sont donc associés, mais comme ils sont de plus unitaires tous les deux, ils sont en fait nécessairement égaux. On en déduit facilement que $P_1 = P_2$, les deux représentants sont donc identiques. \square

1.2 Opérations sur les fractions rationnelles.

Définition 4. On définit sur l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ les opérations d'addition, de multiplication et de produit extérieure suivantes :

- $\forall (P, Q, R, S) \in \mathbb{K}[X]^4, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}$
- $\forall (P, Q, R, S) \in \mathbb{K}[X]^4, \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$.

Remarque 2. Pour que ces définitions soient correctes, il faudrait vérifier qu'elles donnent les mêmes résultats quels que soient les choix de représentants effectués pour chacune des fractions. Supposons par exemple que $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$ et $\frac{R}{S} = \frac{R'}{S'}$ (égalités à prendre au sens des fractions rationnelles, donc $PQ' = QP'$ et $RS' = SR'$), alors on doit vérifier que $\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P'S' + Q'R'}{Q'S'}$, donc que $Q'S'(PS + QR) = QS(P'S' + Q'R')$. En développant tout (désormais, ce sont des égalités entre polynômes), on obtient la condition $Q'S'PS + Q'S'QR = QSP'S' + QSQ'R'$. En exploitant les hypothèses faites on peut la réécrire sous la forme $QP'SS' + SR'QQ' = QP'SS' + SR'QQ'$, ce qui est vrai. Les autres calculs sont aussi peu intéressants.

Théorème 1. L'ensemble $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} .

Démonstration. Il n'y a aucune vérification difficile, mais on est théoriquement obligés de vraiment tout vérifier puisque $\mathbb{K}(X)$ ne peut pas être vu comme un sous-ensemble de choses classiques. Notons simplement que l'élément neutre pour la somme est la fraction nulle $\frac{0}{Q}$ (quel que soit le choix de polynôme Q au dénominateur), l'opposé de la fraction $\frac{P}{Q}$ est tout simplement la fraction $\frac{-P}{Q}$, ou $\frac{P}{-Q}$, qu'on notera de toute façon $-\frac{P}{Q}$. L'élément neutre pour le produit est la fraction $\frac{P}{P}$ (quel que soit le choix de polynôme non nul P), et toute fraction rationnelle non nulle $\frac{P}{Q}$ admet un inverse pour le produit qui est simplement la fraction $\frac{Q}{P}$. Toutes les propriétés d'associativité, commutativité, distributivité, découlent facilement des règles de calcul usuelles sur les polynômes. \square

Remarque 3. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ peut naturellement être vu comme un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$ via l'identification naturelle $P \mapsto \frac{P}{1}$.

Définition 5. Le **degré** de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est défini par $d^\circ(F) = d^\circ(P) - d^\circ(Q)$. Par convention, le degré de la fraction nulle est égal à $-\infty$.

Remarque 4. Cette définition ne dépend pas du choix de représentant effectué pour la fraction : si $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ alors $PS = QR$ donc $d^\circ(P) + d^\circ(S) = d^\circ(Q) + d^\circ(R)$, et $d^\circ(P) - d^\circ(Q) = d^\circ(R) - d^\circ(S)$.

Exemples : Le degré de $F = \frac{X^2 - 2X + 1}{X^4 + 1}$ est donc égal à -2 . Attention à ne pas avoir de réflexes idiots issus de notre habitude à manipuler des polynômes, par exemple une fraction rationnelle de degré nul n'a aucune raison d'être constante, elle est simplement quotient de deux polynômes de même degré.

Proposition 2. Propriétés du degré :

Comme pour les polynômes, $d^\circ(F + G) \leq \max(d^\circ(F), d^\circ(G))$, et $d^\circ(FG) = d^\circ(F) + d^\circ(G)$.

Démonstration. Pour le produit, il suffit d'écrire $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$, donc $d^\circ(FG) = d^\circ\left(\frac{PR}{QS}\right) = d^\circ(P) + d^\circ(R) - d^\circ(Q) - d^\circ(S) = d^\circ(F) + d^\circ(G)$. De même pour la somme, $d^\circ(F + G) = d^\circ\left(\frac{PS + QR}{QS}\right) \leq \max(d^\circ(PS) - d^\circ(QS), d^\circ(QR) - d^\circ(QS)) = \max(d^\circ(F), d^\circ(G))$. \square

Définition 6. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, la **fraction dérivée** de F est la fraction $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$. On définit ensuite par récurrence les dérivées n -èmes de la fraction F pour tout entier naturel n : $F^{(0)} = F$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$.

Remarque 5. Cette définition ne dépend à nouveau pas du choix de représentant de la fraction F . On remarquera que la dérivation sur les fractions rationnelles n'a pas toujours pour effet de

diminuer le degré de la fraction d'une unité. Par exemple $F = \frac{X}{X+1}$ a pour degré 0 mais sa dérivée $F' = \frac{1}{(X+1)^2}$ est de degré -2 .

Proposition 3. Les règles de calcul de dérivation usuelles (dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, formule de Leibniz) restent valables pour les fractions rationnelles.

Démonstration. Calculs sans intérêt dont nous nous dispenserons. Les formules sont de toute façon évidentes si on considère les fractions rationnelles comme des fonctions. \square

Définition 7. La **dérivée logarithmique** de la fraction F est la fraction $\frac{F'}{F}$.

Proposition 4. Si $F = \prod_{i=1}^n F_i$, alors on a la relation suivante sur les dérivées logarithmiques : $\frac{F'}{F} = \sum_{i=1}^n \frac{F'_i}{F_i}$.

Démonstration. On va effectuer une récurrence forte. Pour $n = 2$, on a $F = F_1 F_2$, donc $F' = F'_1 F_2 + F_2' F_1$, ce qui implique bien $\frac{F'}{F} = \frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2}$. Supposons ensuite la formule vérifiée au rang n , et posons $F = \prod_{i=1}^{n+1} F_i$ et $G = \prod_{i=1}^n F_i$, de façon à avoir $F = G F_{n+1}$. On peut alors appliquer le cas $n = 2$ pour écrire $\frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} + \frac{F'_{n+1}}{F_{n+1}}$, puis appliquer l'hypothèse de récurrence au rang n pour conclure. \square

1.3 Pôles et racines d'une fraction rationnelle.

Définition 8. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle et $\frac{P}{Q}$ son représentant irréductible, alors $a \in \mathbb{K}$ est **racine de multiplicité k** de F si a est racine de multiplicité k du polynôme P , et a est **pôle de multiplicité k** de F si a est racine de multiplicité k du polynôme Q .

Remarque 6. Une même valeur ne peut pas être à la fois racine et pôle de F puisque P et Q sont par hypothèses premiers entre eux. Le passage à l'inverse transforme les racines en pôles, et vice-versa.

Exemples : 1 est pôle de multiplicité 2 de la fraction $F = \frac{X}{X^2 - 2X + 1}$, mais pôle de multiplicité seulement 1 de la fraction $G = \frac{X-1}{X^2 - 2X + 1}$ qui peut se simplifier en $\frac{1}{X-1}$. La fraction $H = \frac{X^3 - 1}{X^2 - 1}$ admet deux racines complexes j et j^2 , et un pôle -1 , mais n'admet aucune racine réelle.

2 Décomposition en éléments simples.

2.1 Partie entière.

Définition 9. La **partie entière** de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est le quotient E de la division euclidienne de P par Q .

Remarque 7. On peut donc écrire $F = E + \frac{R}{Q}$, avec $d^\circ(R) < d^\circ(Q)$, donc $d^\circ\left(\frac{R}{Q}\right) < 0$. Le polynôme E est en fait le seul polynôme pour lequel le degré de $F - E$ est strictement négatif (c'est une conséquence de l'unicité de la division euclidienne polynômiale). En particulier, si F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif, sa partie entière est nécessairement nulle.

Exemple : La fraction $F = \frac{X^3 - 2X^2 + 3X - 1}{X + 2}$ a une partie entière égale à $X^2 - 4X + 11$, car $X^3 - 2X^2 + 3X - 1 = (X + 2)(X^2 - 4X + 11) - 23$, et on peut décomposer F sous la forme $F = X^2 - 4X + 11 - \frac{23}{X + 2}$.

2.2 Théorème de décomposition en éléments simples.

Définition 10. Un **élément simple** de $\mathbb{K}(X)$ est une fraction de la forme $\frac{A}{B^n}$, avec $n \geq 1$, B irréductible unitaire, et $d^\circ(A) < d^\circ(B)$.

Remarque 8. On connaît la forme de tous les éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ et de $\mathbb{R}(X)$ en exploitant les théorèmes de factorisation polynômiale qu'on a vus il y a quelques semaines :

- les seuls éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ sont les fractions de la forme $\frac{\alpha}{(X - a)^n}$.
- les fractions de la forme $\frac{\alpha}{(X - a)^n}$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont également des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.
- il faut toutefois leur ajouter toutes les fractions de la forme $\frac{\beta X + \gamma}{(X^2 + aX + b)^n}$, où $X^2 + aX + b$ est un trinôme à discriminant strictement négatif.

Théorème 2. Décomposition en éléments simples, cas général.

Toute fraction rationnelle F peut s'écrire comme la somme de sa partie entière et d'éléments simples de $\mathbb{K}(X)$.

Théorème 3. Décomposition en éléments simples, cas complexe.

Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ peut s'écrire sous la forme $F = E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right)$, où $E \in \mathbb{C}(X)$ et (a_1, \dots, a_n) sont les pôles de la fraction F .

Définition 11. La **partie polaire** associée au pôle a_i d'une fraction rationnelle F est la partie de sa décomposition en éléments simples faisant apparaître les puissances de $X - a_i$ au dénominateur, autrement dit (avec les notations précédentes) $\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j}$. Bien entendu, l'entier p_i correspond à la multiplicité du pôle a_i .

Remarque 9. Si on décompose $F \in \mathbb{R}(X)$ comme une fraction rationnelle à coefficients complexes (ce qui est toujours possible, tout comme il est possible de factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ certains polynômes à coefficients réels), alors les parties polaires associées à des pôles conjugués seront toujours conjuguées (y compris les coefficients du numérateur).

Exemple : On souhaite décomposer la fraction $F = \frac{2X^2 - X + 1}{X^3 + X}$ dans $\mathbb{C}(X)$. On commence par factoriser son dénominateur sous la forme $X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i)$ pour faire apparaître les trois pôles de la fraction (aucun n'étant racine du numérateur, ce sont bien des pôles). Le théorème de décomposition en éléments simples et la remarque faite ci-dessus nous assurent alors de l'existence de deux constantes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ telles que $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X + i} + \frac{\bar{b}}{X - i}$. On peut utiliser les astuces classiques pour calculer les valeurs de a et de b : on obtient a en multipliant l'égalité par X puis en évaluant pour $X = 0$: $a = \frac{1}{1} = 1$, et on calcule par exemple b en multipliant par $X + i$ puis en évaluant en $X = -i$: $b = \frac{2(-i)^2 + i + 1}{-i(-i - i)} = \frac{i - 1}{-2} = \frac{1 - i}{2}$. On peut enfin conclure : $F = \frac{1}{X} + \frac{1 - i}{2(X + i)} + \frac{1 + i}{2(X - i)}$. Bien sûr, on peut regrouper les deux derniers termes si on préfère avoir une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

Théorème 4. Décomposition en éléments simples, cas réel.

Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ peut s'écrire sous la forme $F = E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right) + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^{q_k} \frac{\beta_{k,l}X + \gamma_{k,l}}{(X^2 + b_kX + c_k)^l} \right)$, où $E \in \mathbb{C}(X)$, (a_1, \dots, a_n) la liste des pôles réels de la fraction F , et $X^2 + b_kX + c_k$ parcourt la liste des facteurs irréductibles de degré 2 du dénominateur Q de la fraction F .

Démonstration. Bonne nouvelle pour vous : elle n'est pas au programme ! □

2.3 Méthodes de calculs.

Il est bien sûr toujours possible de calculer n'importe quelle décomposition en éléments simples en procédant à une identification brutale après mise au même dénominateur, mais comme on l'a déjà vu en début d'année, quelques astuces permettent souvent de gagner un peu de temps. On a déjà signalé plus haut la possibilité d'utiliser les pôles complexes, même dans le cas de la décomposition d'une fraction dans $\mathbb{R}(X)$, pour pouvoir exploiter la propriété de conjugaison des coefficients associés aux pôles conjugués. La propriété qui suit sert à formaliser (et simplifier encore) le calcul du numérateur constant dans le cas d'un pôle simple :

Proposition 5. Soit a un pôle simple d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, alors la partie polaire associée à a dans la décomposition de F est de la forme $\frac{\alpha}{X - a}$, avec $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Démonstration. Puisque a est un pôle simple de F , on peut écrire $Q = (X - a)Q_1$, avec $Q_1(a) \neq 0$. Le théorème de décomposition en éléments simples nous assure par ailleurs qu'on peut écrire $F = E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{U}{V}$ avec $V(a) \neq 0$ (il suffit de regrouper les parties polaires correspondant aux autres pôles). En multipliant cette égalité par $X - a$, on a donc $\frac{P}{Q_1} = E(X - a) + \alpha + \frac{U(X - a)}{V}$, soit

en évaluant pour $X = a$, $\alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Il suffit alors de constater que $Q = (X - a)Q_1$ implique $Q' = (X - a)Q_1' + Q_1$, donc $Q_1(a) = Q'(a)$, ce qui conclut la démonstration. \square

Exemple : On souhaite décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{X^5}{X^4 - 1}$. On commence par calculer la partie entière en effectuant la division euclidienne de X^5 par $X^4 - 1$. Pas besoin ici d'écrire une division complète : $X^5 = X^5 - X + X = X(X^4 - 1) + X$, donc $E = X$. Ensuite, on peut utiliser le principe précédent pour calculer les parties polaires de chacun des quatre pôles : $1, -1, i$ et $-i$. Pour ces deux derniers, on peut également n'en calculer qu'un seul et exploiter la conjugaison. Ainsi, avec des notations légèrement abusives on calcule $\frac{X^5}{(X^4 - 1)'}(1) = \frac{X^5}{4X^3}(1) = \frac{X^2}{4}(1) = \frac{1}{4}$.

De même, le numérateur de la partie polaire associée à -1 sera égal à $\frac{X^2}{4}(-1) = \frac{1}{4}$, et celui de la partie polaire associée à i sera égal à $-\frac{1}{4}$ (de même pour celui de $-i$ par conjugaison). Conclusion :

$F = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} - \frac{1}{X - i} - \frac{1}{X + i} \right)$. Or, on nous demandait une décomposition dans

$\mathbb{R}(X)$, il reste donc à regrouper les deux pôles complexes : $F = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X - 1} - \frac{2X}{X^2 + 1} \right)$.

Proposition 6. Soit a un pôle double d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, alors en posant $G = (X - a)^2 F$, la partie polaire associée à a dans la décomposition de F est de la forme $\frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2}$, avec $\alpha = G'(a)$ et $\beta = G(a)$.

Démonstration. On sait que a est pôle double de F , donc que $G(a) \neq 0$. En appliquant le théorème de décomposition en éléments simples, on aura de plus $F = E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} + \frac{U}{V}$, avec $V(a) \neq 0$.

En multipliant cette égalité par $(X - a)^2$, on a donc $G = E(X - a)^2 + \alpha(X - a) + \beta + \frac{U(X - a)^2}{V}$.

Si on évalue pour $X = a$, on trouve immédiatement $G(a) = \beta$. Et si on dérive, $G' = E'(X - a)^2 + 2E(X - a) + \alpha + \frac{U'V(X - a)^2 + 2UV(X - a) - V'U(X - a)^2}{V^2}$. Tous les termes s'annulent et a sauf celui qui est constant égal à α , donc on a bien $G'(a) = \alpha$. \square

Exemple : On souhaite décomposer la fraction $F = \frac{X^6}{(X - 1)^2(X^3 + 1)}$. On peut commencer par développer bourrinement le dénominateur : $(X^2 - 2X + 1)(X^3 + 1) = X^5 - 2X^4 + X^3 + X^2 - 2X + 1$. On calcule ensuite successivement :

- la partie entière E en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : $X^6 = X(X^5 - 2X^4 + X^3 + X^2 - 2X + 1) + 2X^5 - X^4 - X^3 + 2X^2 - X = (X + 2)Q + R$, avec Q le dénominateur de F et R un polynôme de degré 4 sans intérêt. Tout ce qu'on voulait, c'était obtenir $E = X + 2$.

- 1 est un pôle double, on pose donc $G = (X - 1)^2 F = \frac{X^6}{X^3 + 1}$, et on calcule $G(1) = \frac{1}{2}$, puis $G' = \frac{6X^5(X^3 + 1) - 3X^8}{(X^3 + 1)^2}$, donc $G'(1) = \frac{12 - 3}{4} = \frac{9}{4}$. On en déduit que la partie polaire associée à 1 est $\frac{9}{4(X - 1)} + \frac{1}{2(X - 1)^2}$.

- -1 est un pôle simple, méthode classique : $\frac{X^6}{5X^4 - 8X^3 + 3X^2 + 2X - 2}(-1) = \frac{1}{12}$, donc la partie polaire associée est $\frac{1}{12(X+1)}$.
- $-j$ est un pôle simple, méthode classique : $\frac{X^6}{5X^4 - 8X^3 + 3X^2 + 2X - 2}(-j) = \frac{1}{6 + 3j^2 + 3j} = \frac{1}{3}$ (on rappelle que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$), donc la partie polaire associée est $\frac{1}{3(X+j)}$.
- par conjugaison, la partie polaire associée à $-j^2$ est égale à $\frac{1}{3(X+j^2)}$.

On peut conclure : $F = X + 2 + \frac{9}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2} + \frac{1}{12(X+1)} + \frac{1}{3(X+j)} + \frac{1}{3(X+j^2)}$. Si on veut une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, on regroupe les deux derniers termes : $\frac{1}{X+j} + \frac{1}{X+j^2} = \frac{2X+j+j^2}{X^2+(j+j^2)X+j^3} = \frac{2X-1}{X^2-X+1}$, donc $F = X + 2 + \frac{9}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2} + \frac{1}{12(X+1)} + \frac{2X-1}{3(X^2-X+1)}$.

Proposition 7. Si F est une fraction rationnelle paire ou impaire, les parties polaires associées à des pôles opposés peuvent être déduites l'une de l'autre.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la décomposition en élément simples, en écrivant $F(-X) = \pm F(X)$. Il n'existe par contre pas de formule simple générale, les coefficients sont égaux ou opposés selon la parité de F et de la puissance au dénominateur. \square

Remarque 10. Dernière astuce de calcul classique déjà vue plus tôt dans l'année : calculer une limite quand x tend vers $+\infty$ (la plupart du temps après avoir multiplié au préalable par X) pour obtenir un coefficient difficile à calculer (par exemple en cas de pôle double ou de pôle de degré 2 pour une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$).

Exemple : Calcul de la décomposition de $F = \frac{X^4 + 1}{X(X^2 - 1)^2}$. Puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F est nulle. Ensuite, on peut écrire $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X-1} + \frac{e}{(X-1)^2}$, mais l'exploitation de la parité (la fraction F est impaire) impose que $F(-X) = -\frac{a}{X} - \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2} = -F(X)$, dont on déduit que $-a = -a$ (pas très utile) mais surtout $d = b$ et $e = -c$, ce qui nous fait deux coefficients de moins à calculer. Il reste à effectuer les calculs de a , b et c :

- la partie polaire associée à 0 se calcule classiquement en multipliant par X avant d'évaluer (plus rapide ici que de dériver le dénominateur qui est un peu pénible) : $a = \frac{0^4 + 1}{(0^2 - 1)^2} = 1$.
- on peut calculer c classiquement également, en multipliant par $(X+1)^2$ avant de poser $X = -1$, ce qui donne $c = \frac{(-1)^4 + 1}{(-1) \times (-1 - 1)^2} = -\frac{1}{2}$.
- enfin, on peut obtenir b en multipliant la fraction par X avant de faire tendre x vers $+\infty$: $1 = a + b + d$, donc $b = d = 0$.

Il ne reste plus qu'à conclure : $F = \frac{1}{X} - \frac{1}{2(X+1)^2} + \frac{1}{2(X-1)^2}$.

Exemple : Une astuce classique dans le cas d'un pôle réel multiple est le changement de variable pour se ramener au cas d'un pôle égal à 0 (pour lequel la décomposition devient triviale). Cherchons par exemple la décomposition de $F = \frac{2X^2 - X + 3}{(X + 2)^3}$ en posant $Y = X + 2$, donc $X = Y - 2$. On calcule alors $\frac{2(Y - 2)^2 - (Y - 2) + 3}{Y^3} = \frac{2Y^2 - 8Y + 8 - Y + 2 + 3}{Y^3} = \frac{2Y^2 - 9Y + 13}{Y^3} = \frac{2}{Y} - \frac{9}{Y^2} + \frac{13}{Y^3}$. Il ne reste plus qu'à remplacer Y pour conclure : $F = \frac{2}{(X + 2)^3} - \frac{9}{(X + 2)^2} + \frac{13}{X + 2}$.

Exemple : Si on a deux pôles réels dont l'un est multiple mais pas l'autre, le plus simple est de se « débarasser » du pôle simple en calculant la partie polaire associée et en la soustrayant à la fraction initiale. Par exemple, pour $F = \frac{X + 1}{(X - 1)^3(X - 2)}$, on aura une décomposition en éléments simples de la forme $F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{(X - 1)^3} + \frac{d}{X - 2}$. On calcule d'abord d en multipliant simplement par $X - 2$ avant d'évaluer pour $X = 2$: $d = \frac{2 + 1}{(2 - 1)^3} = 3$. On calcule ensuite $G = F - \frac{3}{X - 2} = \frac{X + 1 - 3(X - 1)^3}{(X - 1)^3(X - 2)} = \frac{X + 1 - 3X^3 + 9X^2 - 9X + 3}{(X - 1)^3(X - 2)} = \frac{-3X^3 + 9X^2 - 8X + 4}{(X - 1)^3(X - 2)}$. Le numérateur de G admet 2 pour racine (sinon c'est qu'on s'est trompés dans les calculs précédents !), donc peut se factoriser sous la forme $-3X^3 + 9X^2 - 8X + 4 = (X - 2)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^3 + (\beta - 2\alpha)X^2 + (\gamma - 2\beta)X - 2\gamma$. Une rapide identification donne $\alpha = -3$, puis $\beta - 2\alpha = 9$, donc $\beta = 3$ et enfin $\gamma - 2\beta = -8$ donc $\gamma = -2$. Autrement dit, $G = \frac{-3X^2 + 3X - 2}{(X - 1)^3}$. Reste à décomposer cette fraction à l'aide du changement de variable $Y = X - 1$: $G = \frac{-3(Y + 1)^2 + 3(Y + 1) - 2}{Y^3} = \frac{-3Y^2 - 6Y - 3 + 3Y + 3 - 2}{Y^3} = \frac{-3Y^2 - 3Y - 2}{Y^3} = -\frac{3}{Y} - \frac{3}{Y^2} - \frac{2}{Y^3}$. On peut désormais conclure : $F = -\frac{3}{X - 1} - \frac{3}{(X - 1)^2} - \frac{2}{(X - 1)^3} + \frac{3}{X - 2}$.

Exemple : Dans le cas d'un facteur de degré 2 multiple pour une décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, on pourra parfois tirer profit de divisions euclidiennes successives du numérateur (en augmentant la puissance du dénominateur à chaque étape). On souhaite par exemple décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{X^7}{(X^2 + X + 1)^3}$. On peut procéder comme ceci :

- on effectue une première division euclidienne de X^7 par $X^2 + X + 1$ (sans puissance!) :

$$\begin{array}{r}
 X^7 \\
 - (X^7 + X^6 + X^5) \\
 \quad - X^6 - X^5 \\
 \quad \quad + (X^6 + X^5 + X^4) \\
 \quad \quad \quad X^4 \\
 \quad \quad \quad - (X^4 + X^3 + X^2) \\
 \quad \quad \quad \quad - X^3 - X^2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + (X^3 + X^2 + X) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad X
 \end{array}
 \left| \frac{X^2 + X + 1}{X^5 - X^4 + X^2 - X} \right.$$

On en déduit que $X^7 = (X^5 - X^4 + X^2 - X)(X^2 + X + 1) + X$.

- on effectue une deuxième division euclidienne du quotient de la division précédente par $X^2 + X + 1$:

$$\begin{array}{r}
X^5 - X^4 + X^2 - X \\
- (X^5 + X^4 + X^3) \\
- 2X^4 - X^3 + X^2 - X \\
+ (2X^4 + 2X^3 + 2X^2) \\
 X^3 + 3X^2 - X \\
- (X^3 + X^2 + X) \\
 2X^2 - 2X \\
- (2X^2 + 2X + 2) \\
 - 4X - 2
\end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 + X + 1 \\ X^3 - 2X^2 + X + 2 \end{array} \right.$$

On peut en déduire que $X^5 - X^4 + X^2 - X = (X^3 - 2X^2 + X + 2)(X^2 + X + 1) - 4X - 2$, donc $X^7 = (X^3 - 2X^2 + X + 2)(X^2 + X + 1)^2 - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + X$.

- on effectue une dernière division euclidienne de notre nouveau quotient, toujours par $X^2 + X + 1$:

$$\begin{array}{r}
X^3 - 2X^2 + X + 2 \\
- (X^3 + X^2 + X) \\
- 3X^2 + 2 \\
+ (3X^2 + 3X + 3) \\
 3X + 5
\end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 + X + 1 \\ X - 3 \end{array} \right.$$

On a donc $X^3 - 2X^2 + X + 2 = (X - 3)(X^2 + X + 1) + 3X + 5$.

Il est temps de conclure : $X^7 = (X - 3)(X^2 + X + 1)^3 + (3X + 5)(X^2 + X + 1)^2 - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + X$, donc $F = X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X}{(X^2 + X + 1)^3}$.