

# Feuille d'exercices n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 octobre 2023

## Exercice 1 (\*)

Pour  $\frac{\pi}{8}$ , on ne peut pas faire grand chose d'autre qu'utiliser des formules de duplication, sauf si on connaît déjà les lignes trigonométriques de l'angle  $\frac{\pi}{12}$  (vues en cours). On écrit donc  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$ . On en déduit que  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ .

Comme le cosinus recherché est certainement positif, on en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ . Il existe alors diverses possibilités pour retrouver le sinus, par exemple en utilisant  $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ , d'où  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$  (là encore, la valeur est bien sûr positive). On déduit des deux valeurs déjà calculées que  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ .

Pour  $\frac{\pi}{24}$ , on peut aussi passer par les formules de duplication :  $2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ , donc  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1$ . On en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4}{8}}$ . En exploitant ensuite la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , on trouve  $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}$ , puis enfin  $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}$ , ce qu'on peut essayer de simplifier si on a du temps à perdre (mais on n'obtient rien de très simple).

Autre possibilité, écrire  $\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$  puis appliquer les formules d'addition, ce qui donne par exemple  $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ . Ce n'est pas vraiment plus emballant que par la première méthode.

## Exercice 2 (\*\* à \*\*\*)

1. C'est une application directe du cours : on a soit  $3x \equiv x[2\pi]$ , soit  $3x \equiv \pi - x[2\pi]$ , ce qui donne les deux possibilités  $x \equiv 0[\pi]$  et  $x \equiv \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$  (plein d'autres méthodes plus compliquées également disponibles).
2. Cela se produit si  $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ , ce qu'on note également  $x \equiv \frac{\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ .
3.  $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow -x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{x}{4}[2\pi]$  ou  $-x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{x}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{5x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  ou  $\frac{3x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{5} + k\frac{8\pi}{5}, -\frac{\pi}{3} + k\frac{3\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

4. On effectue bien entendu le changement de variable  $X = \cos(x)$  pour se ramener à l'équation du troisième degré  $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0$ . Cette dernière a le bon goût d'admettre 1 comme racine évidente, on peut donc factoriser sous la forme  $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$ . Par identification des coefficients, on obtient  $a = 2$ ;  $b - a = 1$ , donc  $b = 3$ ; puis  $c - b = -5$  donc  $c = -2$ , ce qui est cohérent avec la dernière condition. Déterminons maintenant les racines du trinôme  $2X^2 + 3X - 2$ , qui admet pour discriminant  $\Delta = 9 + 16 = 25$  et donc pour racines  $X_1 = \frac{-3 - 5}{4} = -2$  et  $X_2 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$ . On peut éliminer la valeur  $X_1$  qui n'est pas très crédible pour un cosinus, et il nous reste donc les deux possibilités (n'oublions pas la racine évidente)  $\cos(x) = 1$ , ce qui donne  $x \equiv 0[2\pi]$ ; et  $\cos(x) = \frac{1}{2}$ , qui donne  $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  ou  $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

5. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  ou  $2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

6. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :

$$\begin{aligned} \sin(3x) \cos^3(x) + \sin^3(x) \cos(3x) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow (3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)) \cos^3(x) + \sin^3(x)(4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)) &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \sin(x) \cos^3(x) - \sin^3(x) \cos(x) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \sin(x) \cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \sin(4x) &= 1 \end{aligned}$$

On a donc  $4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

7. Cette équation ne peut avoir de sens que si  $x \in [-1, 1]$ . Appliquons la fonction sinus à chaque membre de l'égalité : notre équation implique que  $x = \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{3} \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$  (via formule d'addition des sinus). Or, on sait que  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$  (formule utilisée par exemple pour démontrer la formule donnant la dérivée de la fonction arccos), donc notre membre de droite est égal à  $\frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{8}}{12} - \frac{\sqrt{15}}{12} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$ . Cette unique valeur possible est bien solution de l'équation (le membre de droite de l'équation initiale est un angle compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  comme différence d'arccosinus de valeurs positives, donc il correspond nécessairement à l'arcsinus d'un certain réel).

8. L'équation ne peut avoir de sens que si  $x \in [-1, 1]$  et  $2x \in [-1, 1]$ , donc  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . On peut ensuite prendre le sin de chaque côté de l'équation. Comme  $\arccos(x) \in [0, \pi]$ ,  $\sin(\arccos(x)) > 0$ , et  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ . Quant au sinus de arcsin(2x), il vaut évidemment 2x, ce qui donne la condition nécessaire  $2x = \sqrt{1 - x^2}$ . Les solutions de l'équation sont donc forcément positives et vérifient, en élevant au carré l'égalité précédente,  $4x^2 = 1 - x^2$ , soit  $x^2 = \frac{1}{5}$ , donc  $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  (la solution négative ayant déjà été

exclue). Cette valeur est bien inférieure à  $\frac{1}{2}$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$ .

9. On doit déjà avoir  $x\sqrt{3} \in [-1, 1]$ , donc  $x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$  pour que l'équation puisse avoir un sens. Ensuite, on peut par exemple écrire  $\arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$  et prendre le sinus des deux côtés pour obtenir la condition nécessaire  $x\sqrt{3} = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ , donc (en élevant au carré)  $3x^2 = 1 - x^2$ . On trouve alors la condition nécessaire  $x^2 = \frac{1}{4}$ , soit  $x = \pm \frac{1}{2}$ .

On constate aisément que  $\frac{1}{2}$  est solution de l'équation initiale (qui se traduit alors par l'égalité  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ) mais pas  $-\frac{1}{2}$  (dans ce cas le membre de gauche est égal à  $-\frac{\pi}{2}$ ). La seule solution de notre équation est donc  $\frac{1}{2}$ .

10. Il faut cette fois avoir  $x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  pour que l'équation ait un sens. Écrivons l'équation sous la forme  $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(2x)$ , et prenons le sinus de chaque membre pour obtenir la condition nécessaire  $x\sqrt{1-3x^2} + x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 2x$ . Après avoir vérifié que  $x = 0$  était bien solution de l'équation initiale (les trois arcsinus sont alors nuls), on simplifie par  $x$  et on a donc  $\sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3-3x^2} = 2$ . On élève tout au carré (encore une fois, aucune raison que chacune de ces étapes soit une équivalence, on procède seulement par implications successives) :  $1-3x^2 + 3-3x^2 + 2\sqrt{3-12x^2+9x^4} = 4$ , ce qui donne  $\sqrt{3-12x^2+9x^4} = 3x^2$ , et donc en élevant une fois de plus au carré  $3-12x^3+9x^4 = 9x^4$ . Tout cela se réduit à la condition fort simple  $x^2 = \frac{1}{4}$ , ce qui donne comme seules possibilités  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = -\frac{1}{2}$ . On vérifie sans peine que ces deux valeurs sont solutions de l'équation initiale, par exemple pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ , ce qui est certainement vrai (tous les signes sont simplement opposés pour  $-\frac{1}{2}$ ). L'équation a donc trois solutions :  $0, \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ .

11. Si on note  $g : x \mapsto \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$ , la fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante comme somme de trois fonctions croissantes, et vérifie  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{3\pi}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ . La fonction  $g$  est donc bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $\left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ , et notre équation admet nécessairement une solution unique, positive qui plus est (puisque  $g(0) = 0$ , la fonction est de façon impaire). Écrivons alors l'équation sous la forme  $\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ , et composons des deux côtés par la fonction tangente (l'équation obtenue ne sera a priori pas équivalente à l'équation initiale). La formule d'addition des tangentes, ainsi que la formule  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$  permettant alors d'obtenir  $\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x}$ , soit  $\frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$ , ou encore  $2x^2 = 2-x^2$ . Bref, on a  $x^2 = \frac{2}{3}$ , et puisque notre solution est positive, elle est donc nécessairement égale à  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Parmi les douze mille méthodes possibles, on peut commencer par utiliser la formule de duplication  $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$  pour la mettre sous la forme  $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$ . En notant  $S$  la somme qu'on nous demande de calculer, on a donc  $S = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) + 1 \right) =$

$\frac{\cos(\frac{2\pi}{9}) + \cos(\frac{4\pi}{9}) + \cos(\frac{6\pi}{9}) + \cos(\frac{8\pi}{9})}{2} + 2$ . Or on sait très bien que  $\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ , et un petit coup de transformation somme-produit donne  $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$  puisque  $\frac{8\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{9}$ . Bref il ne reste dans notre somme (outre le 2 ajouté ensuite) qu'un facteur  $-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ , et  $S = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$ .

### Exercice 4 (\*\*)

Il suffit d'appliquer une deuxième fois la formule de duplication des tangentes :  $\tan(4x) = \tan(2x + 2x) = \frac{2 \tan(2x)}{1 - \tan^2(2x)} = \frac{\frac{4 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}}{1 - \frac{4 \tan^2(x)}{(1 - \tan^2(x))^2}} = \frac{4 \tan(x)(1 - \tan^2(x))}{1 - 6 \tan^2(x) + \tan^4(x)}$ .

Appliquons la formule à  $x = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$  (qui a évidemment pour tangente  $\frac{1}{5}$ ) pour obtenir  $\tan(4x) = \frac{\frac{4}{5} \times (1 - \frac{1}{25})}{1 - \frac{6}{25} + \frac{1}{625}} = \frac{20 \times 24}{625 - 150 + 1} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$ . Calculons maintenant  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \frac{1 + \frac{1}{239}}{1 - \frac{1}{239}} = \frac{240}{238} = \frac{120}{119}$ . Ca vous rappelle quelque chose ? Les deux angles  $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$  et  $\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$  ont la même tangente, et ils sont tous les deux positifs et plus petits que  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui permet de conclure à l'égalité des deux angles, ce qui prouve la formule de Machin.

La deuxième formule est plus simple :  $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ . Comme on sait par ailleurs que  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ , il est facile de voir que  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$ , ce qui achève la démonstration de l'égalité.

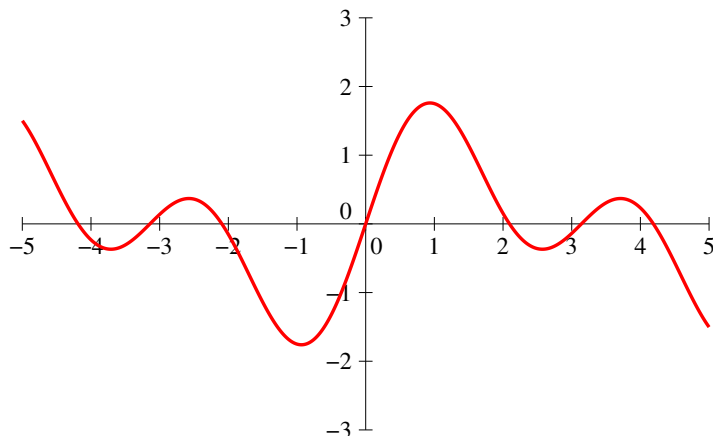
### Exercice 5 (\*\*\*)

- La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle  $[0; \pi]$ . Elle est dérivable, de dérivée  $f'(x) = \cos(x) + 2\cos(2x) = \cos(x) + 2(2\cos^2(x) - 1) = 4\cos^2(x) + \cos(x) - 2$ . En posant  $X = \cos(x)$ , on se ramène à l'étude du signe du trinôme  $4X^2 + X - 2$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 1 + 32 = 33$ , et admet donc pour racines  $X_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$  et  $X_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8}$ . Ces valeurs n'étant certainement pas des cosinus d'angles remarquables, on ne peut que les exprimer à l'aide de la fonction arccos (les deux valeurs sont comprises entre  $-1$  et  $1$ ). Comme arccos est une fonction décroissante,  $\arccos(X_1) < \arccos(X_2)$ , et le tableau de variations ressemble à ceci :

$x$	0	$x_1 = \arccos(X_1)$	$x_2 = \arccos(X_2)$	$\pi$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

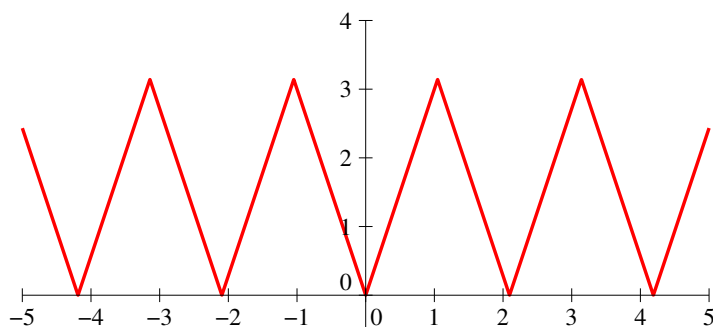
On peut, si on est vraiment très motivé, chercher à calculer les valeurs du minimum et du maximum, mais on va tomber sur des valeurs affreuses. Par exemple,  $f(x_1) = \sin(\arccos(X_1)) +$

$\sin(2 \arccos(X_1)) = \sin(\arccos(X_1)) + 2 \sin(\arccos(X_1)) \cos(\arccos(X_1))$  en appliquant la formule de duplication. Or,  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(X_1))}$  (les sinus sont positifs puisqu'on est dans  $[0; \pi]$ ), donc  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1 - X_1^2}$ , avec  $X_1^2 = \frac{1 + 33 - 2\sqrt{33}}{64} = \frac{34 - 2\sqrt{33}}{64}$ , soit  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{\frac{30 + 2\sqrt{33}}{64}} = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$ . On obtient alors  $f(x_1) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} + 2 \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} \frac{\sqrt{33} - 1}{8} = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} + \frac{(\sqrt{33} - 1)\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{32} = \frac{(\sqrt{33} + 3)\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{32}$ . C'est très laid et fort peu exploitable, on se dispensera donc de tenter un calcul du minimum.



- La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , car  $\cos(3x)$  étant toujours compris entre  $-1$  et  $1$ , on tombe toujours dans l'intervalle de définition de la fonction arccos. La fonction est de plus paire (puisque  $\cos$  l'est), et  $\frac{2\pi}{3}$  périodique (comme  $x \mapsto \cos(3x)$ ). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ . Or, sur cet intervalle, on constate que  $3x \in [0, \pi]$ , donc  $\arccos(\cos(3x)) = 3x$ . La courbe représentative de  $g$  sur cet intervalle est donc un segment de droite, et le reste s'en déduit par la symétrie et la périodicité.

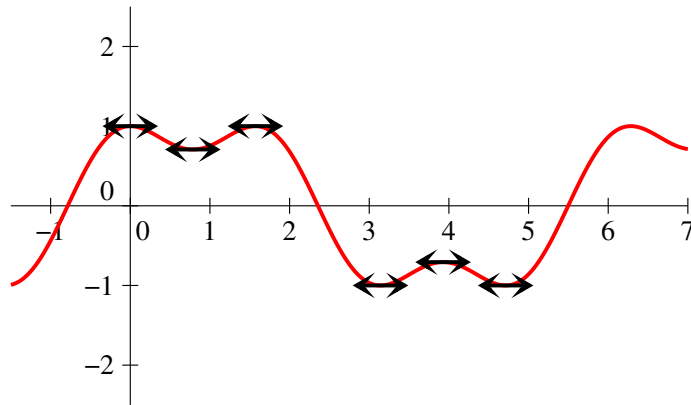
Les plus courageux auront calculé la dérivée :  $g'(x) = -3 \sin(3x) \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(3x)}} = \frac{3 \sin(3x)}{\sqrt{\sin^2(3x)}} = 3 \frac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}$ , qui vaut  $3$  ou  $-3$  selon le signe de  $\sin(3x)$ . On retrouve alors l'allure de la courbe.



- La fonction  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, mais ni paire ni impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle  $[0; 2\pi]$ . On peut la dériver :  $h'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x) + 3 \cos(x) \sin^2(x) = 3 \sin(x) \cos(x) (\sin(x) - \cos(x))$ . Le dernier facteur s'annule en  $\frac{\pi}{4}$  et en  $\frac{5\pi}{4}$ , ce qui permet d'établir le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos(x)$	1	+	0	-	-	0	+
$\sin(x)$	0	+	+	0	-	-	0
$\sin(x) - \cos(x)$	-	0	+	+	0	-	-
$h'(x)$	0	-	0	+	0	+	0
$h$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1

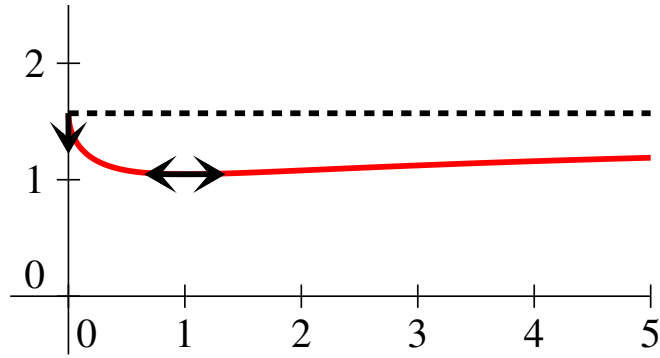
Calcul des valeurs intéressantes :  $f(0) = 1^3 + 0^3 = 1$  ;  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ; les derniers calculs sont extrêmement similaires. On peut enfin tracer une fort belle courbe :



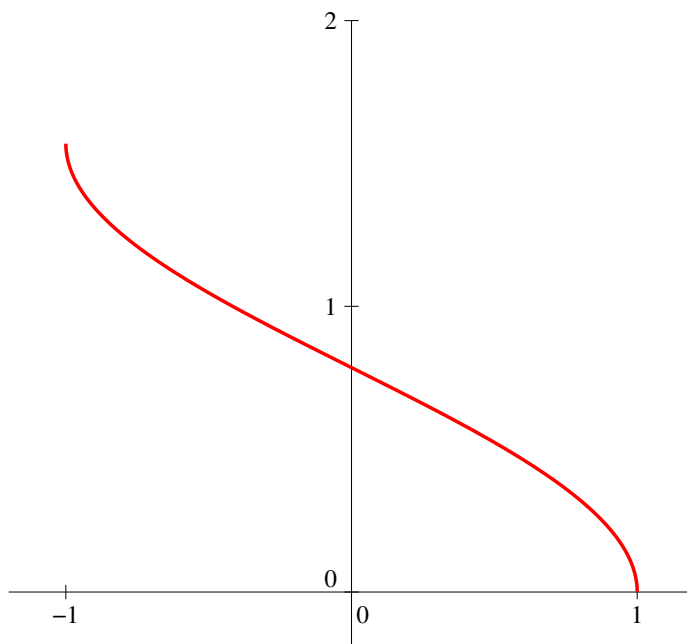
- La fonction  $i$  ne peut être définie que si  $x \geq 0$  (à cause de la racine carrée) et si  $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \in [-1; 1]$  à cause du arccos. Puisqu'on a déjà supposé  $x \geq 0$ , cela revient à dire qu'on doit avoir  $\sqrt{x} \leq 1+x$ , soit en élevant au carré  $x \leq 1+2x+x^2$ , ce qui est toujours le cas. On a donc  $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^+$ . On peut dériver la fonction  $i$ , ce qui donne  $i'(x) = \frac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x}{(1+x)^2}}} = -\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \times \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - x}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$ . On peut constater en passant que la fonction  $i$  n'est pas dérivable en 0 (il y aura une tangente verticale puisque la dérivée y a une limite infinie), et la dérivée, bien qu'assez laide, est simplement du signe de  $x-1$ . La fonction admet donc un minimum en 1, de valeur  $i(1) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ . Par ailleurs,  $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ , et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$ , on aura également  $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \frac{\pi}{2}$ . On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$i$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Et tracer une magnifique courbe :



- La fonction arctan étant définie sur  $\mathbb{R}$ , ce n'est pas elle qui posera problème, la seule condition à vérifier est donc que  $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ , ce qui est le cas sur  $] -1, 1[$ . La fonction  $j$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ , et en posant  $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , et même tant qu'à faire  $v(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , on peut commencer par calculer  $v'(x) = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$ . C'est suffisant pour savoir que la fonction  $j$  sera décroissante sur  $] -1, 1[$  (puisque l'on compose ensuite par la racine carrée puis l'arctangente qui sont deux fonctions croissantes sur leur domaine de définition), mais continuons quand même le calcul :  $u'(x) = \frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x}(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ , et enfin  $j'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}(1+x)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x}(1+x)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1+x}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ . Oh surprise, on reconnaît, à un facteur  $\frac{1}{2}$  près, la dérivée de la fonction arccos, et on en déduit donc que  $j(x) = \frac{1}{2} \arccos(x) + k$  pour une certaine constante réelle  $k$ . Comme  $j(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \arccos(0)$ , on a en fait exactement  $j(x) = \frac{1}{2} \arccos(x)$ . Si on ne s'en est pas rendu compte, on calcule quand même  $j(1) = \arctan(1) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow -1} j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ . Dans tous les cas, la courbe ne sera pas surprenante :



## Exercice 6 (\*\*)

1. Reprenez la construction donnée dans le cours, à l'aide du cercle trigonométrique, du sinus et de la tangente. On peut tout interpréter en termes de longueur :  $\sin(h)$  (remplacez le  $x$  du cours par un  $h$ ) est la hauteur du triangle intérieur au cercle, dont les sommets sont  $O$ ,  $M$  et le point  $I$  de coordonnées  $(1, 0)$ . La valeur de  $\tan(h)$  est la hauteur du triangle extérieur au cercle et tangent extérieurement au point  $I$ . Quant à  $x$ , c'est par définition la longueur de l'arc de cercle reliant le point  $I$  à  $M$ . Ainsi, l'aire du petit triangle vaut  $\frac{1}{2} \sin(h)$ , celle du triangle extérieur vaut  $\frac{1}{2} \tan(h)$ , et la portion de disque contenue entre les deux a pour aire  $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$ . En multipliant tout par 2, on obtient  $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$ .
2. L'inégalité de droite a déjà été prouvée. Celle de gauche s'obtient en partant de  $h \leq \tan(h)$  et en multipliant de chaque côté par  $\cos(h)$ . En divisant tout cela par  $h$ , on a alors  $\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1$ . Comme  $\cos(0) = 1$ ,  $\frac{\sin(h)}{h}$  est encastré par deux expressions tendant vers 1 en 0, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ .
3. Puisque  $\sin(0) = 0$ , on en déduit facilement que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$ . Or,  $\frac{\sin^2(h)}{h} = \frac{1 - \cos^2(h)}{h} = (1 + \cos(h)) \frac{1 - \cos(h)}{h}$ . Le premier terme ayant pour limite 2 en 0, le deuxième doit nécessairement avoir une limite nulle pour que le produit tende vers 0.
4. Revenons à la définition de la dérivée : le taux d'accroissement du cos en  $x$  vaut  $\tau_x(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$ . En utilisant les formules d'addition, on trouve  $\tau_x(h) = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h}$ . Le premier quotient tend vers 0, le deuxième vers 1, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(h) = -\sin(x)$ , ce qui donne bien la dérivée que vous connaissez par cœur pour le cosinus.
5. Même principe, cette fois-ci  $\tau_x(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} =$



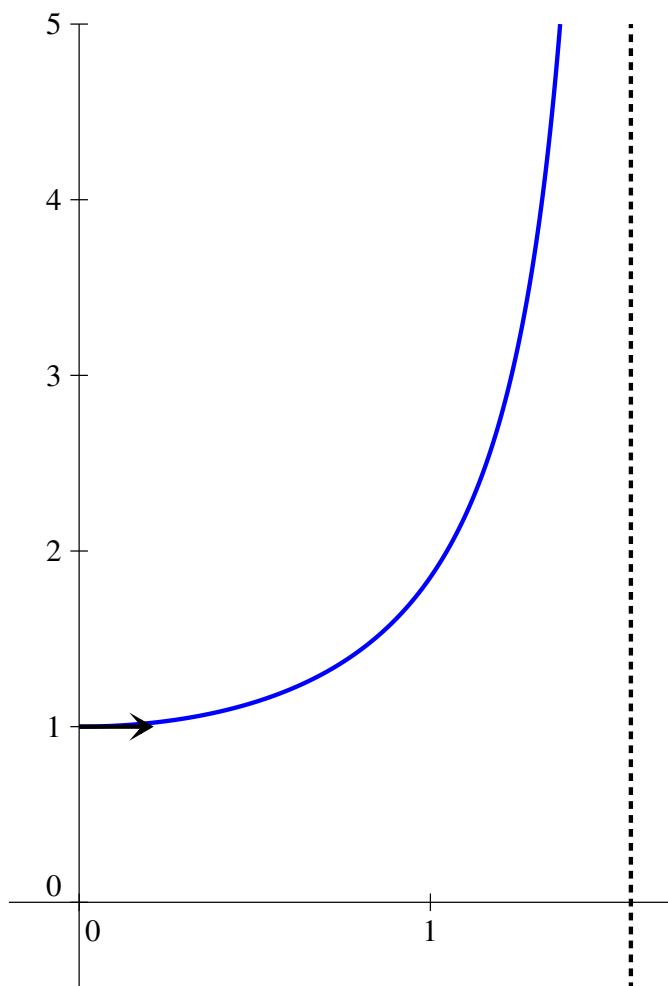
$\cos(x) \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \frac{1 - \cos(h)}{h}$ . Les mêmes limites que tout à l'heure permettent de conclure.

### Exercice 7 (\*\*)

1. La fonction  $f$  n'est pas définie lorsque  $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$  (comme la fonction tangente), le plus grand intervalle possible avec les conditions imposées est donc  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ .
2. La fonction  $\cos$  étant décroissante et positive sur l'intervalle  $I$ , son inverse sera croissante. Si on le souhaite, on peut bien sûr aussi calculer sa dérivée (la fonction  $f$  est dérivable partout où elle est définie)  $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ , qui est bien positive sur tout l'intervalle  $I$ . On a bien sûr  $f(0) = 1$ , et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ , d'où le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f$	1	$+\infty$

La dérivée s'annulant en 0, on peut indiquer la demi-tangente horizontale sur l'allure de courbe :



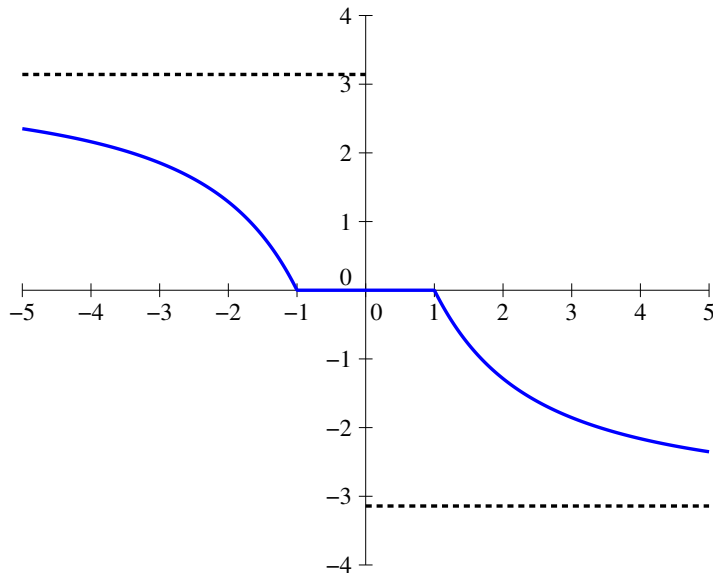
3. La fonction est continue et strictement croissante sur  $I$ , c'est donc une application directe du théorème de la bijection. Les calculs effectués ci-dessus prouvent que  $J = [1, +\infty[$ .
4. On applique la formule vue en cours :  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos}\right)'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}$  d'après le calcul de dérivée effectué plus haut. Or, par définition de la réciproque,  $f(f^{-1}(x)) = x$ , donc  $\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x$ . Autrement dit,  $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$ , dont on déduit facilement  $\cos^2(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x^2}$ , puis  $\sin^2(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ . Les valeurs prises par  $x$  étant nécessairement supérieures ou égales à 1, et  $\sin(f^{-1}(x))$  étant toujours positif (la fonction  $f^{-1}$  étant à valeurs dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ), on peut conclure que  $\sin(f^{-1}(x)) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ , puis enfin que  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ .

### Exercice 8 (\*\*)

1. L'arctangente étant définie sur  $\mathbb{R}$ , et le dénominateur  $1 + x^2$  ne risquant pas de s'annuler, la seule condition pour que  $x$  appartienne à  $\mathcal{D}_f$  est que  $\frac{2x}{1 + x^2} \in [-1, 1]$ . Autrement dit, il faut avoir  $\frac{2x}{1 + x^2} \leq 1$ , soit  $2x \leq 1 + x^2$  (le dénominateur étant toujours positif, on peut multiplier sans risque), et donc  $1 + x^2 - 2x \geq 0$ , condition qui est toujours vérifiée puisque  $1 + x^2 - 2x = (x - 1)^2$  est toujours positif; et il faut par ailleurs que  $\frac{2x}{1 + x^2} \geq -1$ , soit  $2x \geq -1 - x^2$ , donc  $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ , condition qui est elle aussi toujours vérifiée puisque  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ . Finalement, on a simplement  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ . Qui plus est, la fonction  $f$  est impaire, on peut donc restreindre son étude à l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
2. Calculons donc  $f(0) = \arcsin(0) - 2 \arctan(0) = 0 - 0 = 0$ ;  $f(1) = \arcsin(1) - 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0$ ; et enfin  $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ .
3. La dérivée existe si ce qui se trouve dans l'arcsinus dans la définition de  $f$  n'est pas égal à 1 ou à  $-1$ . D'après les calculs effectués dans la première question, cette situation se produit lorsque  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ou lorsque  $x^2 + 2x + 1 = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $x = -1$  ou  $x = 1$ . Quand  $f'$  est définie, on peut écrire  $f(x) = \arcsin(u(x)) - 2 \arctan(x)$  avec  $u(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ , et on peut calculer  $u'(x) = \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$ . Ensuite,  $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}}} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \times \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^4 + 2x^2 - 4x^2}} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2(1 - x^2)}{1 + x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2}} - \frac{2}{1 + x^2}$ .
4. Si  $x \in [-1, 1]$ ,  $1 - x^2 \geq 0$  et  $f'(x) = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} = 0$ . La fonction  $f$  est donc constante sur  $[-1, 1]$ , et même nulle sur cet intervalle vu les valeurs calculées plus haut.
5. Si  $x \geq 1$ , on a désormais  $f'(x) = -\frac{2}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} = -\frac{4}{1 + x^2}$ , donc  $f(x) = -4 \arctan(x) + k$ . La constante  $k$  est par exemple obtenue en regardant pour  $s = \sqrt{3}$  :  $-\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{\pi}{3} + k$ , donc  $k = \pi$  et  $f(x) = \pi - 4 \arctan(x)$ .
6. On sait que la fonction  $\arctan$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , ce qui donne facilement les variations de la fonction  $f$ . On utilise aussi l'imparité pour compléter le tableau, la seule chose restant à calculer est la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On l'obtient sans problème avec la forme initiale ou avec la forme simplifiée :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\pi$ . D'où le tableau complet suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$	$\pi$	$\searrow$	$0$	$\rightarrow$	$0$
			$\rightarrow$	$0$	$\rightarrow$
				$\rightarrow$	$0$
				$\searrow$	$-\pi$

Il ne reste plus qu'à donner l'allure de la courbe :



### Exercice 9 (\*\*)

- Posons donc  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ . La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ . La fonction  $f$  est donc constante sur  $]0, +\infty[$ . Comme par ailleurs  $f(1) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$ , la valeur de cette constante est égale à  $\frac{\pi}{4}$ , ce qui prouve l'égalité souhaitée.
- On utilise la formule d'addition des tangentes pour obtenir  $\frac{\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x(x+1)}} = \frac{x+1 + x(x-1)}{x(x+1) - (x-1)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$ . Notre membre de gauche a donc une tangente égale à 1, mais ça ne suffit pas à affirmer qu'il vaut  $\frac{\pi}{4}$ . Pour cela, ajoutons le fait que  $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , et  $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  (le quotient dand l'arctangente est nécessairement inférieur à 1, et supérieur à  $-1$  puisque le numérateur ne peut pas être inférieur à  $-1$  et le dénominateur est toujours au moins égal à 1), donc notre membre de gauche est un angle appartenant à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  ayant la même tangente que  $\frac{\pi}{4}$ , il ne peut qu'être égal à  $\frac{\pi}{4}$ .

## Exercice 10 (\*\*)

- Il faut bien évidemment que  $x \in [-1, 1]$  pour que  $\arcsin(x)$  soit défini. De plus, on a la condition  $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$  (la fonction arctan étant définie sur  $\mathbb{R}$ , ce sera la seule condition supplémentaire), ce qui est le cas si  $x \in [-1, 1[$  (un petit tableau de signes si besoin). Finalement,  $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$ .
- Pour dériver, procédons par étapes. En posant  $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , on obtient d'abord  $g'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ . On compose ensuite par la racine carrée pour obtenir  $\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$ . Il ne reste plus qu'à ajouter l'arctangente pour obtenir la deuxième moitié de la dérivée de  $f$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \frac{1-x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = 0$ . La fonction  $f$  est donc constante. Comme  $f(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(1) = -\frac{\pi}{2}$ , on en déduit que,  $\forall x \in [-1, 1[$ ,  $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ .
- Posons donc  $x = \cos(\theta)$  (ce qui est certainement faisable puisque  $x \in [-1, 1[$ . On peut alors écrire  $\arcsin(x) = \arcsin(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \theta$  (on peut toujours choisir  $\theta \in [0, \pi]$ ). Par ailleurs,  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{(1+\cos(\theta))^2}{1-\cos^2(\theta)} = \frac{(1+\cos(\theta))^2}{\sin^2(\theta)}$ , donc  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  (sur  $[0, \pi]$ , le sinus est nécessairement positif). Avec un bon feeling, ou plutôt en regardant bien ce qu'on veut obtenir à la fin, on peut alors penser à tout exprimer en fonction de l'angle  $\frac{\theta}{2}$  : les formules de duplication assurent que  $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$ , et  $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , on en déduit que  $\frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ . En utilisant l'une des nombreuses formules du cours,  $\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ , ce qui permet, en ajoutant l'arctangente, de simplifier  $f(x)$  sous la forme  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ . On retrouve le même résultat qu'à la question précédente.

## Exercice 11 (\*\*\*)

- La fonction  $\cos$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , le domaine de définition de  $T_n$  est le même que celui de la fonction  $\arccos$ , c'est-à-dire le segment  $[-1, 1]$ .
- Calculons :  $T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(0) = 1$  ;  $T_n(0) = \cos(n \arccos(0)) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  (qui vaut 0 si  $n$  est impair, 1 si  $n$  est multiple de 4 et  $-1$  si  $n$  est pair mais pas multiple de 4) ; et  $T_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ .
- Si  $x \in [0, \pi]$ , on peut simplifier  $\arccos(\cos(x))$  pour trouver  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ , donc  $g(x) = 0$ . De plus,  $g$  est une fonction paire, car  $\cos$  est paire, elle s'annule donc aussi sur  $[-\pi, 0]$ . Enfin,  $g$  est  $2\pi$ -périodique tout comme cosinus, donc, étant nulle sur une période, elle est toujours nulle. Cela prouve bien que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ .
- C'est du simple calcul :  $T_0(x) = \cos(0) = 1$  (polynôme constant) ;  $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$  (dans ce sens-là, ça marche toujours, du moins bien évidemment pour les valeurs de  $x$  pour

lesquelles arccos est définie) ;  $T_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$  en utilisant les formules de duplication ; et  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$  de même, en utilisant cette fois la formule de triplification du cosinus.

5. (a) Le plus simple est de partir de la formule de transformation produit-somme appliquée avec  $b = (n+1)a$ , ce qui donne  $\cos(a) \cos((n+1)a) = \frac{1}{2}(\cos(a+(n+1)a) + \cos((n+1)a-a)) = \frac{1}{2}(\cos((n+2)a) - \cos(na))$ . La formule demandée en découle immédiatement.
  - (b) On applique tout simplement la formule précédente en choisissant  $a = \arccos(x)$  (et on simplifie bien sûr le  $\cos(\arccos(x))$  en  $x$ ).
  - (c) Encore du calcul bête :  $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$  ; puis  $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$  ; et enfin  $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ .
6. Il faut simplement chercher les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , ce qui revient bien à dire que  $x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ . La seule chose à comprendre, c'est qu'on peut se restreindre aux valeurs de  $k$  comprises entre 0 et  $n-1$ , mais pour les autres valeurs de  $k$ , on va tout simplement retomber sur les mêmes valeurs du cosinus ! Par exemple  $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$ . De toute façon, les valeurs de  $x_k$ , pour  $k$  compris entre 0 et  $n-1$ , sont toutes distinctes (ce sont des cosinus d'angles distincts compris entre 0 et  $\pi$ ), et  $T_n$ , qui est un polynôme de degré  $n$ , ne peut pas avoir plus de  $n$  racines distinctes.

## Exercice 12 (\*\*)

1. Les fonctions sh et arctan étant toutes deux définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $\arctan \circ \text{sh}$  l'est aussi. C'est moins évident pour la deuxième moitié puisque la fonction arccos n'est définie que sur  $[-1, 1]$ , mais ça tombe bien, la fonction th est justement à valeurs dans cet intervalle, ce qui permet d'affirmer que  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
2. La fonction  $f$  est toujours dérivable (th ne prend jamais les valeurs 1 et -1 qui sont les seules pour lesquelles arccos n'est pas dérivable), et  $f'(x) = \frac{\text{sh}'(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} - \frac{\text{th}'(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}}$ . Or, on sait bien que  $\text{sh}' = \text{ch}$  et que  $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$  (c'est la seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaître), donc  $1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x)$  et notre premier quotient se simplifie en  $\frac{1}{\text{ch}(x)}$  (qui est bien défini sur  $\mathbb{R}$  puisque la fonction ch ne s'annule jamais). Pour la deuxième moitié, on peut utiliser les résultats vus dans le problème de la feuille d'exercices :  $\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ , et  $1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$  également. Comme ch est une fonction strictement positive,  $\frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}} = \text{ch}(x)$ , et la deuxième moitié de notre dérivée se simplifie exactement comme la première pour donner la conclusion inattendue que  $f'(x) = 0$ . La fonction  $f$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$ , égale à  $f(0) = \arctan(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ .
3. Rappelons qu'une des expressions de la fonction th est  $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ , ce qui permet de transformer l'équation à résoudre en équation équivalente  $13(e^{2x} - 1) = 5(e^{2x} + 1)$ , soit  $e^{2x} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ . On en déduit que  $2x = \ln\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \ln(3) - 2 \ln(2)$ , donc l'unique solution est  $x = \ln(3) - \ln(2)$ .

4. La fonction  $\arctan$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\arctan(y) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$  ne peut avoir qu'au plus une solution (peut-être zéro). Or, on sait que, si  $x = \ln(3) - \ln(2)$ , alors  $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$ , et qu'alors  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x)) = \frac{\pi}{2}$ , ce qui prouve que  $y = \operatorname{sh}(x)$  est une solution de l'équation. Il ne reste donc plus qu'à calculer la valeur de  $\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln(\frac{3}{2})} - e^{-\ln(\frac{3}{2})}}{2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{6}$ .

### Exercice 13 (\*)

On ne va pas s'embêter et utiliser une méthode brutale à base de dérivation. Posons  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ , la fonction  $f$  est bien sûr définie et dérivable sur  $[0, +\infty[$ , et  $f'(x) = \operatorname{ch}(x) \times \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2(x)}$ . Or, on sait que  $1 + \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$ , donc  $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ . Posons maintenant  $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$ . La fonction  $g$  est bien définie sur  $[0, +\infty[$  puisque  $\operatorname{ch}(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in ]0, 1]$ . La fonction  $g$  est dérivable et  $g'(x) = -\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1}}$ . On utilise à nouveau le fait que  $\operatorname{ch}^2(x) - 1 = \operatorname{sh}^2(x)$ , et que  $\operatorname{sh}(x) \geq 0$  sur notre intervalle, pour simplifier et obtenir à nouveau  $g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ . Nos deux fonctions ont la même dérivée, elles sont donc égales à une constante près. Calculons alors  $f(0) = \arctan(0) = 0$  et  $g(0) = \arccos(1) = 0$  pour conclure à l'égalité des deux fonctions.

### Exercice 14 (\*\*)

Vu ce qui nous est demandé, il est pertinent de poser  $\alpha = \arctan(x)$  et  $\beta = \arctan(y)$ , ou plutôt  $x = \tan(\alpha)$  et  $y = \tan(\beta)$  (ce qu'on peut faire pour n'importe quel réel), avec bien sûr  $(\alpha, \beta) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On peut alors écrire  $\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}} = \frac{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}\sqrt{1 + \tan^2(\beta)}}$ . Commençons par simplifier, en utilisant les deux écritures de la dérivée de la tangente,  $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}} = \cos(\alpha)$  (le cosinus est nécessairement positif vu l'intervalle dans lequel se trouve  $\alpha$ ). On fait bien sûr de même avec le second terme du dénominateur, ce qui nous donne  $\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}} = (1 - \tan(\alpha)\tan(\beta))\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha + \beta)$ . Reste donc à simplifier  $\arccos(\cos(\alpha + \beta))$  en faisant un peu attention : si  $\alpha + \beta \in [0, \pi[$ , c'est-à-dire si  $x + y \geq 0$  (si les deux réels sont de même signe, les deux  $\arctan$  seront aussi de même signe, et s'ils sont de signe opposé le signe de la somme  $\alpha + \beta$  sera toujours le même que celui de  $x + y$ ), alors l'expression vaut simplement  $\alpha + \beta$ , c'est-à-dire que  $\arccos\left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$ . Mais si  $\alpha + \beta \in ]-\pi, 0[$ , donc lorsque  $x + y < 0$ , on trouvera  $\arccos\left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}\right) = -\arctan(x) - \arctan(y)$  (angle appartenant à  $[0, \pi]$  de même cosinus que son opposé).

### Exercice 15 (\*\*\*)

1. La fonction  $\arctan$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , seule l'annulation possible du dénominateur de la fraction à l'intérieur de l'arctangente est à prendre en compte. On en déduit que  $\mathcal{D}_f =$

$\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ .

2. On cherche donc à résoudre l'équation  $\arctan\left(\frac{2-2x}{2x-x^2}\right) = \frac{\pi}{6}$ . En composant par la fonction tangente, cette équation implique (en fait c'est une équivalence à cause de la bijectivité de la fonction arctangente) que  $\frac{2-2x}{2x-x^2} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , soit  $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 2x - x^2$  et donc  $x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$ . Cette équation du second degré a pour discriminant  $\Delta = 4(1 + \sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} = 4 + 12 = 16$ , et admet pour racines  $x_1 = \frac{2(1 + \sqrt{3}) - 4}{2} = \sqrt{3} - 1$  et  $x_2 = \frac{2(1 + \sqrt{3}) + 4}{2} = \sqrt{3} + 3$ . Si on le souhaite, on vérifie que ces deux réels sont bien solutions de l'équation initiale.

3. Il suffit de calculer  $\frac{2 - 2(2-x)}{2(2-x) - (2-x)^2} = \frac{2x-2}{-x^2+2x} = -\frac{2-2x}{2x-x^2}$ . La fonction arctangente étant impaire, on aura bien  $f(2-x) = -f(x)$ . Les deux réels  $x$  et  $2-x$  étant symétriques par rapport à 1, la courbe représentative de  $f$  sera symétrique par rapport au point de coordonnées  $(1, 0)$ .

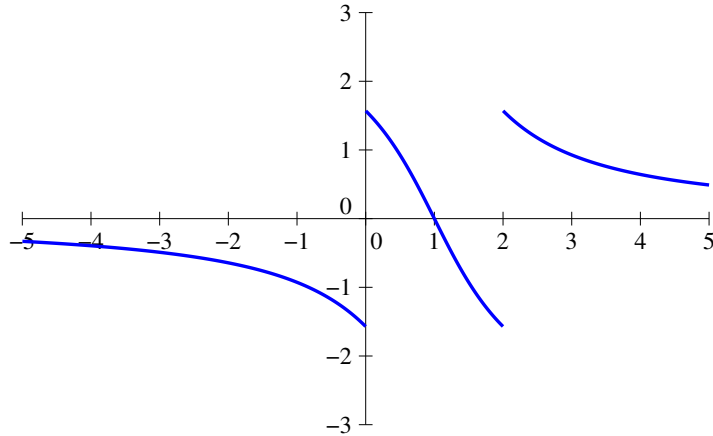
4. Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-2x}{2x-x^2} = 0$  (par exemple en exploitant le quotient des termes de plus haut degré), on aura  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \arctan(0) = 0$ . Pour les autres limites (en 0 et en 2, des deux côtés), le signe de  $2x - x^2$  est positif uniquement entre ses racines, dont on déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-2x}{2x-x^2} = -\infty$  (donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ ) et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-2x}{2x-x^2} = +\infty$  (donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ ). Même principe pour les autres limites, mais avec un numérateur qui a une limite négative :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ .

5. Pour simplifier un peu le calcul, commençons par poser  $g(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$  et par calculer la dérivée de cette fonction (qui est définie et dérivable, comme  $f$  elle-même, sur tout  $\mathcal{D}_f$ ) :  $g'(x) = \frac{-2(2x-x^2) - (2-2x)^2}{(2x-x^2)^2} = \frac{2x^2-4x-4+8x-4x^2}{x^2(2-x)^2} = \frac{-2x^2+4x-4}{x^2(2-x)^2}$ . On peut déjà constater que  $g'(x)$  est toujours négatif (le numérateur a un discriminant négatif), donc la fonction  $g$  est strictement décroissante sur chacun de ses intervalles de définition, et  $f$  aussi (la composition par arctan qui est définie et croissante sur  $\mathbb{R}$  ne modifiera pas les variations). Mais calculons tout de même  $f'(x)$ , car ça va se simplifier :  $f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} = \frac{-2x^2+4x-4}{x^2(2-x)^2} \times \frac{1}{1+\frac{(2-2x)^2}{x^2(2-x)^2}} = \frac{-2x^2+4x-4}{(2x-x^2)^2+(2-2x)^2}$ , qui est bien sûr toujours négatif.

Voici donc le tableau de variations complet de la fonction  $f$  :

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
		$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	

6. Il n'y a en fait pas grand chose à indiquer sur cette courbe à part les limites : la symétrie signalée en question 3 impose que  $f(1) = 0$ , et on peut bien sûr placer correctement les antécédents de  $\frac{\pi}{6}$  :



7. La simplification de  $f'$  ne sautant pas vraiment aux yeux, on ne peut que développer son dénominateur :  $(2x - x^2)^2 + (2 - 2x)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4 + 4 - 8x + 4x^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$ , et espérer que ça se simplifie avec son numérateur (divisé par  $-2$  pour alléger un tout petit peu le calcul). Pour celà, effectuons une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & - & 4x^3 & + & 8x^2 & - & 8x & + & 4 & & x^2 - 2x + 2 \\
 - & (x^4 & - & 2x^3 & + & 2x^2) & & & & & x^2 - 2x + 2 \\
 & & & -x^3 & + & 6x^2 & - & 8x & + & 4 & \\
 & & & - & (-2x^3 & + & 4x^2 & - & 4x) & & \\
 & & & & & 2x^2 & - & 4x & + & 4 & \\
 & & & & & - & (2x^2 & - & 4x & + & 4) \\
 & & & & & & & & & 0 & 
 \end{array}$$

Tiens, c'est amusant, le quotient est le même que le polynôme par lequel on a divisé ! On a donc  $f'(x) = \frac{-2(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 2} = -\frac{2}{1 + (x - 1)^2}$  (oui, ça aussi, il faut le voir), autrement dit  $f'$  est la dérivée de la fonction  $x \mapsto -2 \arctan(x - 1)$ . On peut donc simplifier l'expression de la fonction  $f$ , en faisant toutefois attention à bien distinguer ses trois intervalles de définition :

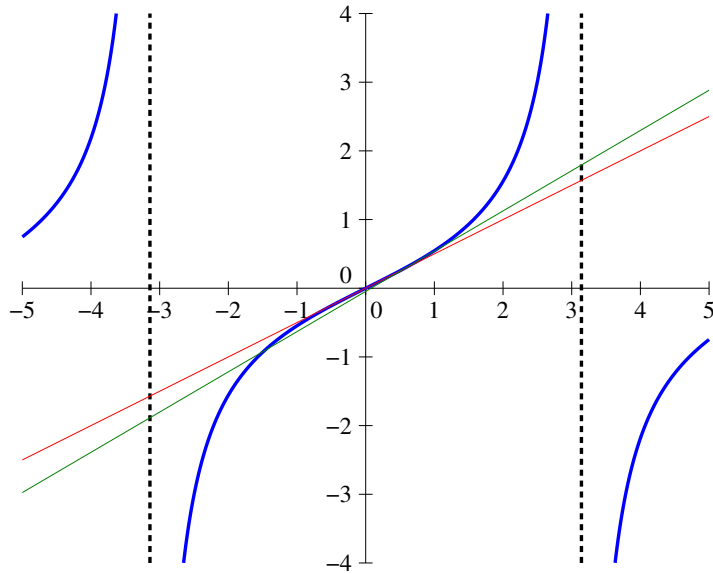
- sur  $]0, 2[$ , on peut écrire  $f(x) = -2 \arctan(x - 1) + K_1$ , avec  $K_1 \in \mathbb{R}$ , et la condition  $f(1) = 0$  assure que  $K_1 = 0$ . On a donc simplement  $f(x) = -2 \arctan(x - 1)$  sur cet intervalle.
  - sur  $]2, +\infty[$ , on peut écrire  $f(x) = -2 \arctan(x - 1) + K_2$ , avec  $K_2 \in \mathbb{R}$  (constante n'ayant aucune raison d'être égale à la précédente). Comme on ne dispose pas de valeur évidente à calculer sur cette intervalle, on peut exploiter la limite en  $+\infty$  : avec l'expression que nous venons de donner, on aura  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \times \frac{\pi}{2} + K_2 = K_2 - \pi$ . Comme on a vu par ailleurs que cette limite était nulle, celà impose  $K_2 = \pi$ , et donc  $f(x) = \pi - 2 \arctan(x - 1)$  sur cet intervalle.
  - enfin, sur  $] - \infty, 0[$ , on peut procéder de même ou exploiter la symétrie de la courbe par rapport au point de coordonnées  $(1, 0)$  et on obtient  $f(x) = -2 \arctan(x - 1) - \pi$ .
8. On a vu à la question 2 que  $f(\sqrt{3} + 3) = \frac{\pi}{6}$ . Comme  $\sqrt{3} + 3 > 2$ , on peut donc en déduire, en exploitant les expressions obtenues à la question précédente, que  $-2 \arctan(\sqrt{3} + 3 - 1) = \frac{\pi}{6}$ , soit  $\arctan(\sqrt{3} - 2) = -\frac{\pi}{12}$ . Par imparité de la fonction  $\arctan$ , on en déduit que  $\frac{\pi}{12} = \arctan(2 - \sqrt{3})$ , et donc que  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$  en composant simplement l'égalité par la fonction tangente.
9. Si  $x \in ]0, 2[$ ,  $1 - x \in ] - 1, 1[$ , et on peut donc écrire  $x = 1 - \tan(\theta)$  (ou si on préfère poser  $\theta = \arctan(1 - x)$ ) avec  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$  (comme très souvent dans ce genre de calcul,



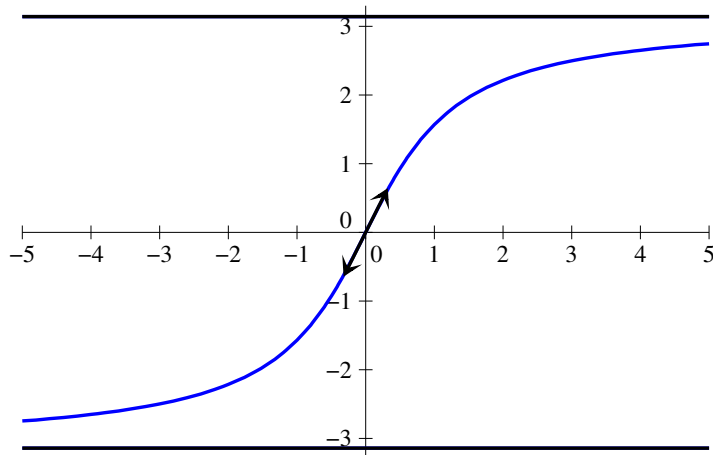
l'intervalle aura une importance primordiale pour la simplification finale). Calculons alors  $f(x) = \arctan\left(\frac{2 - 2(1 - \tan(\theta))}{2(1 - \tan(\theta)) - (1 - \tan(\theta))^2}\right) = \arctan\left(\frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}\right) = \arctan(\tan(2\theta))$  (on a reconnu la formule de duplication des tangentes dans la parenthèse). Or,  $2\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  (ça tombe bien, quand même), ce qui permet de simplifier :  $f(x) = 2\theta = 2 \arctan(1 - x) = -2 \arctan(x - 1)$ .

## Exercice 16 (\*\*)

1. Le seul problème qui peut se poser est celui de l'annulation du dénominateur, qui se produira lorsque  $\cos(x) = -1$ , donc lorsque  $x \equiv \pi[2\pi]$ . Si on tient absolument à écrire un bel ensemble,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .
2. La parité des fonctions sin et cos implique que  $f$  est une fonction impaire (quotient d'une fonction impaire par une fonction paire). Elle est de plus bien entendu  $2\pi$ -périodique. On pourra donc l'étudier sur l'intervalle  $I = [0, \pi[$  et compléter par symétrie puis par périodicité.
3. Calculons donc  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , puis  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$   
 $= -\frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \sqrt{2} - 1$ , et enfin  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ .
4. L'équation  $f(x) = 1$  implique que  $\sin(x) = 1 + \cos(x)$ , ou encore  $\sin(x) - \cos(x) = 1$ . Une méthode originale consiste à tout élever au carré (ce n'est bien sûr qu'une implication) pour obtenir  $\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$ , donc  $\sin(x)\cos(x) = 0$  en utilisant l'égalité classique  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . Les valeurs vérifiant cette dernière équation (et pour lesquelles  $f$  est définie) sont les  $x$  tels que  $x \equiv 0[2\pi]$  (mais on vérifie facilement que dans ce cas  $f(x) = 0$ , donc  $x$  n'est pas solution de l'équation de départ), et ceux tels que  $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ . Comme  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{0 + 1} = 1$ , et que par imparité de  $f$  on a donc nécessairement  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ , les seules solutions de l'équation  $f(x) = 1$  sont les nombres de la forme  $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .
5. La fonction  $f$  est certainement dérivable sur chacun de ses intervalles de définition, et  $f'(x) = \frac{\cos(x)(1 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$ , qui est toujours positif puisque  $\cos(x)$  est minoré par  $-1$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et en particulier sur  $[0, \pi[$ .
6. Puisque  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ , la première tangente a pour équation  $y = \frac{1}{2}x$ . Le deuxième calcul de la question 3 et l'imparité de  $f$  impliquent que  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$ , et  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$ . La deuxième tangente demandée a donc pour équation  $y = (2 - \sqrt{2})\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} - 1$  (développer l'équation ne présente pas le moindre intérêt).
7. Les tangentes seront à peu près indistinguables sur la courbe suivante :



8. La fonction étant continue et strictement croissante, elle est bijective sur  $] -\pi, \pi[$ . Le calcul de limites ne pose aucun problème :  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$  (et on aura une limite opposée en  $-\pi$  par imparité), donc l'intervalle image est simplement  $\mathbb{R}$  tout entier. La courbe de la réciproque est obtenue par symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$  (on peut indiquer la tangente à l'origine, qui aura pour équation  $y = 2x$ , là aussi à cause de la symétrie) :



### Exercice 17 (\*\*\*)

- Pour que  $x$  appartienne à  $\mathcal{D}_f$ , il faut déjà que  $1 - x^2 \geq 0$ , donc que  $x \in [-1, 1]$ . Ensuite, pour pouvoir composer par l'arc sinus, il faut en plus vérifier que  $2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1]$ . Pour cela, posons  $g(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ , et étudions la fonction  $g$ , qui est définie sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $g'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} + 2x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2(1 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$ . Cette dérivée s'annule lorsque  $1 - 2x^2 = 0$ , donc  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la fonction  $g$  étant croissante entre ces deux valeurs et décroissante en-dehors de l'intervalle  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ . On calcule donc  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 1$ . La fonction  $g$  étant impaire, même pas besoin de calculer son

minimum pour pouvoir dresser le tableau suivant :

$x$	$-1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1$
$g$	$0$		$1$	$0$

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$   
 $-1$

La conclusion est qu'on a tout simplement  $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$ . La fonction  $f$  étant elle aussi impaire (puisque  $g$  et arcsin le sont toute les deux), on peut se contenter de l'étudier sur  $[0, 1]$ .

2. On a déjà signalé que  $g$  (et donc  $f$ ) ne serait pas dérivable en  $-1$  et en  $1$  à cause de la racine carrée. La composition par arcsin peut également poser problème aux endroits où  $g(x) = \pm 1$ , donc  $f$  ne sera a priori pas dérivable non plus en  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
3. Calculons donc : partout où cela a un sens,  $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}$ . On peut simplifier le numérateur avec la deuxième racine carrée du dénominateur sans changement de signe si  $1-2x^2 > 0$ . On en déduit que, sur  $\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ , on a  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ , alors que, sur chacun des deux autres intervalles de dérivabilité de  $f$ , on aura  $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ .
4. On reconnaît bien sûr (au signe près selon les intervalles) dans  $f'(x)$  la dérivée de  $2 \arcsin(x)$ , ce qui permet de tirer les conclusions suivantes :
  - sur  $\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ , il existe une constante  $K \in \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = 2 \arcsin(x) + K$ . Mais comme  $f(0) = \arcsin(0) = 0$ , on a nécessairement  $K = 0$  et donc  $f(x) = 2 \arcsin(x)$ .
  - sur  $\left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$ , il existe une constante réelle  $L$  telle que  $f(x) = L - 2 \arcsin(x)$ . Par continuité cette égalité restera valable lorsque  $x = 1$ , ce qui implique  $f(1) = 0 = L - 2 \arcsin(1) = L - \pi$ , donc  $L = \pi$  et  $f(x) = \pi - 2 \arcsin(x)$ .
  - on peut tout simplement utiliser l'imparité de  $f$  pour en déduire que  $f(x) = -\pi - 2 \arcsin(x)$  sur l'intervalle restant  $\left] -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ .

Autrement dit, l'égalité  $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2 \arcsin(x)$  est vraie sur l'intervalle  $\left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$  (on peut inclure les bornes où l'égalité restera vraie par continuité de toutes les fonctions manipulées).

5. (a) C'est la définition même de la fonction arcsin, il suffit de poser  $\theta = \arcsin(x)$ .
- (b) Si  $t \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ , alors  $\pi - t$  est un angle ayant le même sinus que  $t$  et appartenant à l'intervalle  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  sur lequel l'égalité  $\arcsin(\sin(x)) = x$  est vérifiée. On a donc  $\arcsin(\sin(t)) = \arcsin(\sin(\pi - t)) = \pi - t$ , comme demandé par l'énoncé. Comme arcsin et sin sont deux fonctions impaires, on peut en déduire que, si  $t \in \left[ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$ , alors  $\arcsin(\sin(t)) = -\arcsin(\sin(-t)) = -(\pi + t) = -\pi - t$ .
- (c) Calculons donc  $f(x) = f(\sin(\theta)) = \arcsin(2 \sin(\theta) \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}) = \arcsin(2 \sin(\theta) \sqrt{\cos^2(\theta)})$ . Les hypothèses faites sur  $\theta$  font que  $\cos(\theta) \geq 0$ , donc  $f(x) = \arcsin(2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = \arcsin(\sin(2\theta))$ . On obtiendra donc  $f(x) = 2\theta = 2 \arcsin(x)$  à la condition que  $2\theta \in$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc que  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ . Puisqu'on a posé  $x = \sin(\theta)$ , ceci se produit exactement quand  $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ . On retrouve bien entendu le résultat de la question 4. C'est pareil pour les autres expressions possibles : si  $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors  $\theta > \frac{\pi}{4}$  et  $f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\arcsin(x)$  en reprenant la formule prouvée en question 5.b. Le dernier intervalle se traite de la même manière.

## Problème

### I. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

1. (a) On sait que  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ , donc  $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$ .
  - (b) En posant  $x = \frac{\pi}{5}$ , on aura  $4x = \frac{4\pi}{5} = \pi - x$ , donc  $\cos(4x) = -\cos(x)$ . Au vu de la relation précédente, on a donc  $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = -\alpha$ , soit  $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ .
  - (c) La racine la plus évidente est  $-1$  :  $8(-1)^4 - 8(-1)^2 - 1 + 1 = 0$ . On peut donc factoriser :  $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d$ . On a donc  $a = 8$  ;  $a + b = 0$ , soit  $b = -8$  ;  $b + c = -8$  soit  $c = 0$  ;  $c + d = 1$  soit  $d = 1$ . Soit  $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(8x^3 - 8x^2 + 1)$ . Reste à trouver une deuxième racine,  $x = \frac{1}{2}$  convient puisque  $\frac{8}{8} - \frac{8}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ . On peut donc à nouveau factoriser :  $8x^3 - 8x^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ex^2 + fx + g) = ex^3 + \left(f - \frac{1}{2}e\right)x^2 + \left(g - \frac{1}{2}f\right)x - \frac{1}{2}g$ . Par identification, on obtient  $e = 8$  ;  $f - \frac{1}{2}e = -8$ , soit  $f = -4$  ;  $g - \frac{1}{2}f = 0$  soit  $g = -2$ . Finalement,  $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$ .
  - (d) Déterminons les racines du dernier facteur obtenu ci-dessus. Le trinôme  $4x^2 - 2x - 1$  (on peut factoriser par 2) a pour discriminant  $\Delta = 4 + 16 = 20$ , et admet deux racines  $x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ , et  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ . La valeur de  $\alpha$  est donc celle d'une des quatre racines trouvées pour l'équation. Ce n'est sûrement pas  $-1$  puisque  $\alpha > 0$  (c'est le cosinus d'un angle inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ ), pas non plus  $x_2$  qui est également négative, et ça ne peut pas être  $\frac{1}{2}$  puisqu'on sait qu'il s'agit du cosinus de l'angle  $\frac{\pi}{3}$ , et que la fonction cosinus ne peut pas prendre deux fois cette valeur avant  $\frac{\pi}{2}$ . Finalement,  $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .
2. (a) Prenons plutôt les choses à l'envers :  $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 2\sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x))$ , donc pour tous les angles vérifiant  $\sin(x) \neq 0$ ,  $\frac{\sin(4x)}{2\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) = \cos(3x) + \cos(x)$  puisqu'on sait que  $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ .
  - (b) On a donc  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ . Or,  $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ . Finalement,  $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$ .
  - (c) À l'aide de la formule de transformation d'un produit en somme,  $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$ . Or,  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  ; et de même

$\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ . Au vu du résultat de la question précédente, on a donc  $\alpha \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ .

(d) Le réel  $\alpha$  est donc solution de l'équation  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ , dont le discriminant est  $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ , et qui admet pour racines  $x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ , et  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ . Comme dans la première partie de l'exercice, on conclut pour des raisons de signe que  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ . On a au passage prouvé que  $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ .

## II. Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ !

- Si  $\sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ , c'est que  $\frac{h}{2} \equiv 0[\pi]$ , donc  $h \equiv 0[2\pi]$ . Mais alors on a, pour tout entier  $k$ ,  $\cos(a + kh) = \cos(a)$  et  $\sin(a + kh) = \sin(a)$ , donc  $S_n(a, h) = n \sin(a)$  et  $C_n(a, h) = n \cos(a)$ .
- Je donne le calcul avec les complexes car c'est quand même plus agréable :  $C_n(a, h) + iS_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia} \frac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}} = e^{ia} \frac{e^{i\frac{nh}{2}} 2i \sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{e^{i\frac{h}{2}} 2i \sin\left(\frac{h}{2}\right)} = e^{i(a+(n-1)\frac{h}{2})} \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$ . Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire pour obtenir les formules demandées.
- Parmi les quatre cosinus dont  $x_1$  est la somme, seul le dernier est négatif puisque  $\frac{3\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{5\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\frac{7\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . De plus,  $\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right)$  et  $\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) < \cos\left(\frac{5\pi}{17}\right)$ , donc  $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$ , et  $x_1$ , obtenu en ajoutant encore deux termes positifs, est bien positif.
- La somme  $x_1 + x_2$  est exactement de la forme  $C_n(a, h)$ , avec  $a = \theta$ ,  $h = 2\theta$  et  $n = 8$ . D'après la question 2, on a donc  $x_1 + x_2 = \frac{\sin(8\theta) \cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1 \sin(16\theta)}{2 \sin(\theta)}$ . Mais  $16\theta = \frac{16\pi}{17} = \pi - \theta$ , donc  $\sin(16\theta) = \sin(\theta)$  et  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ .
- Il faut y croire :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \cos(3\theta) \cos(\theta) + \cos(3\theta) \cos(9\theta) + \cos(3\theta) \cos(13\theta) + \cos(3\theta) \cos(15\theta) \\ &+ \cos(5\theta) \cos(\theta) + \cos(5\theta) \cos(9\theta) + \cos(5\theta) \cos(13\theta) + \cos(5\theta) \cos(15\theta) \\ &+ \cos(7\theta) \cos(\theta) + \cos(7\theta) \cos(9\theta) + \cos(7\theta) \cos(13\theta) + \cos(7\theta) \cos(15\theta) \\ &+ \cos(11\theta) \cos(\theta) + \cos(11\theta) \cos(9\theta) + \cos(11\theta) \cos(13\theta) + \cos(11\theta) \cos(15\theta) \end{aligned}$$

On utilise les formules de transformation produit/somme et on obtient  $x_1 x_2$ , comme sommes des cosinus des 32 angles suivants (on peut oublier les signes puisque le cos est pair) :  $4\theta, 2\theta, 12\theta, 6\theta, 16\theta, 10\theta, 18\theta, 12\theta, 6\theta, 4\theta, 14\theta, 4\theta, 18\theta, 8\theta, 20\theta, 10\theta, 8\theta, 6\theta, 16\theta, 2\theta, 20\theta, 6\theta, 22\theta, 8\theta, 12\theta, 10\theta, 20\theta, 2\theta, 24\theta, 2\theta, 26\theta$  et  $4\theta$ . Or,  $26\theta \equiv -8\theta[2\pi]$ , donc  $\cos(26\theta) = \cos(8\theta)$ . De même,  $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$ ,  $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$ ,  $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$  et  $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$ . En regroupant tout ceci, on obtient  $x_1 x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(16\theta))$ . La parenthèse vaut  $C_8(2\theta, 2\theta) = \frac{\sin(8\theta) \cos(9\theta)}{\sin(\theta)}$ , avec  $\cos(9\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 8\theta\right) = -\cos(8\theta)$ , d'où  $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$ .

- On connaît la somme et le produit de  $x_1$  et  $x_2$ , ils sont solutions de l'équation  $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$ , de discriminant  $1 + 16 = 17$ . Comme on l'a vu plus haut,  $x_1 > 0$ , donc

on a  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$  et  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$ .

7. Allons-y :  $y_1 y_2 = \cos(3\theta) \cos(7\theta) + \cos(3\theta) \cos(11\theta) + \cos(5\theta) \cos(7\theta) + \cos(5\theta) \cos(11\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)) = \frac{1}{4} x_1 x_2 = -\frac{1}{4}$ .

De même,  $y_3 y_4 = \cos(\theta) \cos(9\theta) + \cos(\theta) \cos(15\theta) + \cos(13\theta) \cos(9\theta) + \cos(13\theta) \cos(15\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)) = -\frac{1}{4}$  (après simplifications similaires à celles faites pour  $x_1 x_2$ ).

8.  $y_1$  et  $y_2$  ayant pour somme  $x_1$  et produit  $-\frac{1}{4}$ , ils sont solutions de l'équation  $x^2 - x_1 x - \frac{1}{4}$ , donc le discriminant vaut  $x_1^2 + 1 = \frac{1}{2} x_1 + 2 = \frac{17 + \sqrt{17}}{8}$  et les solutions  $\frac{1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}$ . La solution positive est égale à  $y_1$ , car  $y_2$  est somme de deux cosinus négatifs. De même, on obtient  $y_3 = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$  et  $y_4 = \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$ .

9. De plus en plus facile :  $\cos(\theta) \cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = \frac{1}{2}(-\cos(5\theta) - \cos(3\theta)) = -\frac{y_1}{2}$ . Comme de plus  $\cos(\theta) + \cos(13\theta) = y_3$ , les réels  $\cos(\theta)$  et  $\cos(13\theta)$  sont solutions de l'équation  $x^2 - y_3 x - \frac{y_1}{2}$ ,  $\cos(\theta)$  étant la solution positive. Le discriminant de l'équation vaut

$$y_3^2 + 2y_1 = \frac{1 + 17 + 34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}{64} + \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} = \frac{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}{64}$$

et on a ensuite  $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}}{16}$ .

Étonnant, non ?