Feuille d'exercices n° 4 : Trigonométrie

MPSI Lycée Camille Jullian

3 octobre 2023

Exercice 1 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(3x) = \sin(x)$
2. $\tan(2x) = 1$
3. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
4. $2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$
5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
6. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$
7. $\arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$
9. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$
10. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$
11. $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3 (**)

Calculer $\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ (on doit pouvoir trouver une valeur explicite simple).

Exercice 4 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 5 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$
- $j(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ (on essaiera d'expliquer l'allure obtenue pour la courbe, qui doit rappeler celle d'une fonction usuelle).

Exercice 6 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$, puis calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\dfrac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\dfrac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Exercice 7 (**)

Soit f la fonction définie $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1. Déterminer l'intervalle I le plus grand possible inclus dans $\mathbb{R}^+$ et contenant 0 sur lequel f soit toujours définie.
2. Dresser le tableau de variation de f sur I, et donner l'allure de sa courbe représentative.
3. Montrer que f est bijective de I vers un intervalle J à préciser.
4. Déterminer la dérivée de la réciproque f^{-1} de la fonction f restreinte à l'intervalle I.

Exercice 8 (**)

On pose dans tout cet exercice $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemblede définition de la fonction f, puis un ensemble d'étude intelligent pour f.
2. Calculer les images $f(0)$, $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, après avoir précisé les valeurs de x pour lesquelles cette dérivée existe.
4. Simplifier l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Montrer que, $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \pi - 4\arctan(x)$.
6. Donner le tableau de variations complet de f, puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 9 (**)

On souhaite prouver dans cet exercice l'égalité $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, valable pour tout réel x strictement positif.

1. Première méthode : démontrer la formule à l'aide d'un calcul brutal de dérivée.
2. Deuxième méthode : calculer la tangente du membre de gauche de l'égalité, et conclure rigoureusement.

Exercice 10 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Exprimer f plus simplement en vous aidant d'un calcul de dérivée.
3. Retrouver ce même résultat à partir de manipulation trigonométriques en faisant intervenir une variable θ telle que $x = \cos(\theta)$.

Exercice 11 (***)

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction T_n.
2. Calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
3. Posons $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$ pour tout x réel. Que vaut $g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$? Quelle est la parité de g ? Sa périodicité ? En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Montrer que $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sont des polynômes en x, que l'on précisera.
5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$.
   (b) En déduire que pour $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$, puis calculer $T_4(x)$ et $T_5(x)$.
6. Démontrer que les solutions de l'équation $T_n(x) = 0$ sont les réels $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec k entre 0 et $n-1$.

Exercice 12 (**)

On pose dans cet exercice $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \arccos(\mathrm{th}(x))$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Calculer $f'(x)$ lorsque celà a un sens, en déduire une expression simplifiée de f.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x) = \dfrac{5}{13}$.
4. En déduire les solutions de l'équation $\arctan(y) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 13 (*)

Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$.

Exercice 14 (**)

Simplifier l'expression $\arccos\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)$ (le résultat doit s'exprimer en fonction de $\arctan(x)$ et de $\arctan(y)$).

Exercice 15 (***)

On définit une fonction f par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2-2x}{2x-x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les antécédents par f du réel $\dfrac{\pi}{6}$.

3. Vérifier que, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(2-x) = -f(x)$. Interpréter géométriquement ce résultat (il s'agit d'une symétrie de la courbe).
4. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f, en déduire son tableau de variations complet.
6. Tracer une allure soigneée de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.
7. Simplifier l'expression de f en distinguant plusieurs intervalles (et en commençant par simplifier $f'(x)$ si ça n'a pas déjà été fait).
8. À l'aide des résultats des questions 2 et 7, déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
9. En posant $x = 1 - \tan(\theta)$, retrouver l'expression simplifiée de f sur l'intervalle $]0, 2[$.

Exercice 16 (**)

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f, et en déduire un intervalle d'étude de la fonction.
3. Calculer les images suivantes : $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en déduire les variations de f sur l'intervalle d'étude choisi.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0. Même question au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
7. On admet que $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on essaiera évidemment de faire figurer les tangentes calculées à la question précédente).
8. Justifier que f effectue une bijection de $]-\pi, \pi[$ vers un intervalle à déterminer, et donner une allure de la courbe représentative de sa réciproque.

Exercice 17 (***)

On cherche à déterminer quels sont les réels x pour lesquels l'égalité $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin(x)$ est vérifiée. Pour celà, on pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de f. Peut-on restreindre l'étude de f à un intervalle plus petit que $\mathcal{D}_f$?
2. Étudier rigoureusement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.
3. Calculer et simplifier $f'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de f sur chacun des intervalles où elle est dérivable, et répondre à la question posée en début d'énoncé.
5. On souhaite retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
   (a) Justifier, lorsque $x \in \mathcal{D}_f$, l'existence d'un unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(\theta)$.
   (b) Justifier que, si $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(t)) = \pi - t$. Trouver une formule similaire pour $\arcsin(\sin(t))$ si $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire une simplification de $f(\sin(\theta))$ (en distinguant éventuellement des cas) et conclure.

Problème (***)

I. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Cette première partie présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
   (d) Déterminer la valeur exacte de α.
2. (a) Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$ (quand cela a un sens).
   (b) En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.
   (c) Calculer $\alpha \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
   (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par α, et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

II. Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$!

Pour tous réels a et h, et pour tout entier n, on pose $C_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh)$
et $S_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh)$. On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

1. Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin \dfrac{h}{2} = 0$.
2. Dans le cas contraire, prouver que $C_n(a,h) = \dfrac{\sin \frac{nh}{2} \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$
   et $S_n(a,h) = \dfrac{\sin \frac{nh}{2} \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$ (le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).
3. On pose $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos\theta + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.
4. Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).
5. Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
6. En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2.
7. On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos\theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
8. En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4.
9. Calculer le produit $\cos\theta\cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos\theta$ (pour les plus ~~masochistes~~ courageux, finir les calculs et donner cette valeur).