Feuille d'exercices n° 26 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

11 juin 2024

Exercice 1 (* à **)

1. L'application est sans problème symétrique (le produit par $1-t^2$ dans l'intégrale n'y change absolument rien) et linéaire à gauche : $\displaystyle\int_0^1 (\lambda f_1+f_2)(t)g(t)(1-t^2)\ dt = \lambda\int_0^1 f_1(t)g(t)(1-t^2)\ dt + \int_0^1 f_2(t)g(t)(1-t^2)\ dt$ (simplement application de la linéarité de l'intégration), donc bilinéaire. De plus, comme $1-t^2 \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)(1-t^2)\ dt \geqslant 0$, ce qui prouve la positivité de notre application. Enfin, cette dernière intégrale ne peut s'annuler que si $\forall t \in [0,1]$, $f^2(t)(1-t^2)$, ce qui implique $f(t)=0$, sauf éventuellement pour $t=1$ (puisque dans ce cas le facteur $1-t^2$ s'annule). Mais par continuité de la fonction f, la nullité sur $[0,1[$ suffit à assurer que f est la fonction nulle. Notre application est donc définie positive, c'est bien un produit scalaire.
2. L'application, qu'on notera φ pour les calculs, est symétrique de façon évidente, et linéaire à gauche en exploitant la linéarité de l'intégrale et celle de la dérivation : $\displaystyle\int_0^1 (\lambda f_1+f_2)'(t)g'(t)\,dt = \lambda\int_0^1 f_1'(t)g'(t)\ dt + \int_0^1 f_2'(t)g(t)\ dt$. Le morceau en-dehors de l'intégrale est aussi linéaire à gauche de façon évidente, donc φ est une application bilinéaire. La positivité est claire : $\displaystyle\varphi(f,f) = f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\ dt \geqslant 0$. Enfin, le dernier produit scalaire calculé ne peut s'annuler que si $f(0)=0$ et $\forall t\in[0,1]$, $f'(t)=0$. Mais alors la fonction f est constante sur $[0,1]$, donc nulle puisque $f(0)=0$. L'application φ est donc définie positive, c'est un produit scalaire. Remarquons que sans l'ajout de $f(0)g(0)$ devant l'intégrale, l'application ne serait pas un produit scalaire (toutes les fonctions constantes vérifieraient $\varphi(f,f)=0$).
3. Symétrie et bilinéarité sont triviaux (en exploitant bien sûr la linéarité de la dérivation). La positivité l'est également : $P(1)^2+P'(2)^2+P''(0)^2 \geqslant 0$. De plus, si cette quantité est nulle, alors $P(1)=P'(2)=P''(0)=0$. La dernière condition implique que notre polynôme est en fait de degré au maximum 1. Comme il admet 1 pour racine, on a donc $P=a(X-1)$ pour un certain réel a. Mais alors $P'=a$, donc $P'(2)=0 \Rightarrow a=0$, et P est le polynôme nul. Finalement, notre application est bien un produit scalaire. Ce ne serait par contre pas le cas sur $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Il faut bien sûr lire un $d\theta$ à la place du dt dans l'intégrale pour que ça ait un sens. Le changement de variable ne modifie absolument pas la symétrie ou la bilinéarité, évidentes pour ce type d'application. La positivité non plus d'ailleurs : $\displaystyle\int_0^{2\pi} P^2(\cos(\theta))\ d\theta \geqslant 0$, et ne peut s'annuler que si, $\forall\theta\in[0,2\pi]$, $P(\cos(\theta))=0$. Mais quitte à poser $t=\cos(\theta)$, t va parcourir l'intervalle $[-1,1]$ quand θ parcourt $[0,2\pi]$ et on a donc $\forall t\in[-1,1]$, $P(t)=0$, ce qui suffit à assurer que P est le polynôme nul (grosse infinité de racines).

5. Si on veut être rigoureux, il faudrait déjà prouver que E est un espace vectoriel. La stabilité par produit extérieure est facile : si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = S < +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n)^2 = \lambda^2 S < +\infty$. Supposons maintenant que (u_n) et (v_n) soient deux suites appartenant à E, alors on peut écrire $(|u_n| - |v_n|)^2 = u_n^2 - 2|u_n||v_n| + v_n^2 \geqslant 0$, donc $|u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$. Cela assure que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ converge absolument (elle est majorée en valeur absolue par une série convergente par hypothèse, puisque somme de deux séries convergentes), ce qui permet d'une part de prouver que E est stable par somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 < +\infty$, et en même temps d'assurer également que l'application dont on cherche à prouver qu'il s'agit d'un produit scalaire est bien définie sur E^2. Notons φ cette application. La linéarité à gauche découle de celle de la somme des séries convergentes, et la symétrie est évidente, donc φ est bilinéaire. De plus, $\varphi(u_n, u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$, et ne peut s'annuler que si tous les termes de la série (qui est à termes positifs) s'annulent, donc si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, ce qui revient bien à dire que la suite (u_n) est nulle. L'application φ est donc un produit scalaire (vous en entendrez reparler l'an prochain).

Exercice 2 (*)

1. On procède bien sûr en trois étapes en respectant le plan habituel :
   - en posant $u_1 = (0, 1, 1)$, on calcule $\|u_1\| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$, et on pose donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.
   - en posant $u_2 = (1, 0, 1)$, on a $u_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on pose donc $u_2' = u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On calcule maintenant $\|u_2'\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, donc $e_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
   - enfin, en posant $u_3 = (1, 1, 0)$, on aura $u_3 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_3 \cdot e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, on pose donc $u_3' = u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_2 = (1, 1, 0) - \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Il ne reste plus qu'à calculer $\|u_3'\| = \sqrt{3 \times \frac{4}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, puis à poser $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

   La famille $\left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2. On procède là aussi en trois temps, en respectant comme d'habitude les notations du cours :
   - $\|f\|^2 = \int_{-1} = 11\ dt = 2$, donc on pose $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   - $g \cdot e_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\ dt = \left[\frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1} = 0$, donc on a simplement à normer notre deuxième fonction : $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$, on pose donc $e_2(t) = \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
   - $h \cdot e_1 = \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{\sqrt{2}}\ dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (la fonction intégrée est paire, ce qui justifie le

calcul), et $h \cdot e_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t|t|\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, dt = 0$ (pas besoin de se fatiguer, cette fois-ci la fonction est impaire). On pose donc $u_3(t) = |t| - \dfrac{1}{2}$, puis on calcule $\|u_3\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|t| - \frac{1}{2}\right)^2 dt = 2\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\, dt = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$. On en déduit $e_3(t) = \sqrt{6}|t| - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
La famille (e_1, e_2, e_3) est une base orhonormale de $\mathrm{Vect}(f, g, h)$.

3. Ah, cette fois-ci on va avoir droit à quatre étapes :
   - on calcule $\|1\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$, puis on pose $e_1 = \dfrac{1}{2}$.
   - comme $X \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} = 3$, on pose $u_2' = X - \dfrac{3}{2}$, on calcule $\left\|X - \dfrac{3}{2}\right\| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{5}$, puis on pose $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}X - \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.
   - ça va commencer à devenir moche, du coup on va tricher un peu en utilisant la bilinéarité pour les calculs de produit scalaire : $X^2 \cdot 1 = 1 + 4 + 9 = 14$, donc $X^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 7$, et $X^2 \cdot X = 1 + 8 + 27 = 36$, donc $X^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}X - \dfrac{3}{2\sqrt{5}}\right) = \dfrac{36}{\sqrt{5}} - \dfrac{21}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$. On peut donc poser $u_3' = X^2 - 3X + \dfrac{9}{2} - \dfrac{7}{2} = X^2 - 3X + 1$ (pas si moche, finalement !). Reste à calculer $\|u_3'\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$. Incroyable, on a donc juste $e_3 = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2}$.
   - encore un peu de courage : $X^3 \cdot 1 = 36$, donc $X^3 \cdot \dfrac{1}{2} = 18$; $X^3 \cdot X = 1 + 16 + 81 = 98$, donc $X^3 \cdot e_2 = \dfrac{98}{\sqrt{5}} - \dfrac{54}{\sqrt{5}} = \dfrac{44}{\sqrt{5}}$; et $X^3 \cdot X^2 = 1 + 32 + 243 = 276$, donc $X^3 \cdot e_3 = 138 - 147 + 9 = 0$. Encore une simplification inattendue. On pose alors $u_4' = X^3 - 9 - 44X + 66 = X^3 - 44X + 57$. Allez, un dernier calcul pour la route : $\|u_4\| = \sqrt{57^2 + 14^2 + 23^2 + 48^2} = \sqrt{6\,278}$, ce qui donne un e_4 absolument ignoble et sans intérêt !

Exercice 3 (**)

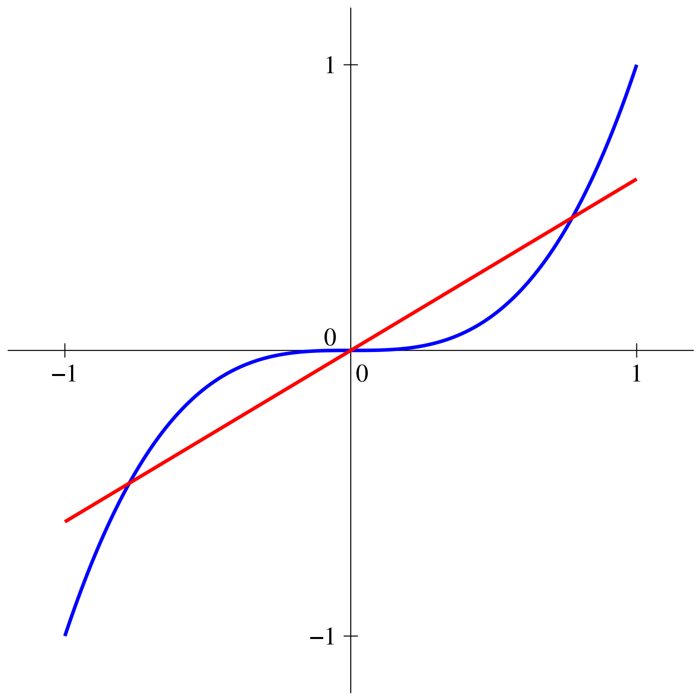
1. On a l'embarras du choix, par exemple calculer un déterminant après avoir additionné les deux premières colonnes puis développé par rapport à la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 18 - 39 = -21$, qui est loin d'être nul. La famille est donc bien une base.
2. Allons-y, ça ne sera pas trop pénible pour le produit scalaire canonique : $\|u\| = \sqrt{1+4+4} = 3$, on pose donc $e_1 = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. On calcule ensuite $v \cdot e_1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{2}{3} = 3$, et on pose donc $v' = v - 3e_1 = (-2, 2, -1)$. On constate que $\|v\| = 3$, donc on va poser $e_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. Dernier vecteur à modifier : $w \cdot e_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{10}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$, et $w \cdot e_2 = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$, on calcule donc $w' = w - \dfrac{14}{3}e_1 - \dfrac{5}{3}e_2 = \left(\dfrac{14}{9}, \dfrac{7}{9}, -\dfrac{14}{9}\right) = \dfrac{7}{9}(2, 1, -2)$. On en déduit que $\|w'\| = \dfrac{7}{9} \times 3 = \dfrac{7}{3}$, et on pose donc $e_3 = \dfrac{3}{7}w' = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

3. On sait que (e_1, e_2) est une base orthonormale de F. On peut donc calculer la projection de n'importe quel vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ en calculant $p(u) = -(u \cdot e_1)e_1 + (u \cdot e_2)e_2$. En particulier, $p(1,0,0) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 = \left(\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $p(0,1,0) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 = \left(-\frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}\right)$ et $p(0,0,1) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right)$. Ce qui donne donc $\mathrm{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
4. Il est bien sûr inutile de refaire des calculs pénibles : $s = 2p - \mathrm{id}$, donc $\mathrm{Mat}_{can}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (**)

1. Il s'agit d'une vérification extrêmement classique : $P \cdot Q = Q \cdot P$ de façon évidente, donc l'application est symétrique. De plus, la linéarité de l'intégrale assure que $\int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)\ dt = \lambda \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\ dt + \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\ dt$. Autrement dit, l'application est linéaire à gauche, donc aussi à droite (par symétrie), elle est donc bilinéaire. La positivité ne pose pas de problème puisqu'elle découle de celle de l'intégrale : $P \cdot P = \int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt \geqslant 0$, et on ne peut avoir égalité que si $\forall t \in [-1,1]$, $P^2(t) = 0$, et donc $P(t) = 0$, ce qui assure que $P = 0$ puisque P admet alors une infinité de racines. On est donc bien en présence d'un produit scalaire.
2. On va bien sûr appliquer notre procédé de Gram-Schmidt préféré en partant de la base canonique :
   - $\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$, on pose donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   - Comme $X \cdot 1 = \int_{-1}^{1} t\ dt = 0$ (la fonction est impaire), il suffit également de normaliser pour obtenir notre deuxième vecteur : $\|X\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \frac{2}{3}$, on pose donc $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$.
   - Encore un produit scalaire nul (celui de X^2 avec X, puisqu'à nouveau le produit des deux fonctions est impair), on calcule donc seulement $X^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$ (à un facteur près, même calcul que celui de la norme au carré de X ci-dessus), puis on pose $u_3' = X^2 - \frac{2}{3}$. On calcule ensuite $\left\|X^2 - \frac{2}{3}\right\|^2 = \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{9}\ dt = \frac{2}{5} - \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = \frac{2}{5}$, et on pose donc $e_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}X^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}$.
   - Cette fois-ci ce sont deux produits scalaires sur les trois qui sont nuls (toujours pour la même raison), on ne calcule donc que $X^3 \cdot X = \int_{-1}^{1} t^4\ dt = \frac{2}{5}$, on en déduit $X^3 \cdot e_2 = \frac{\sqrt{6}}{5}$, puis on pose $u_4' = X^3 - \frac{3}{5}X$. On calcule la norme : $\left\|X^3 - \frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2\ dt = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{50-42}{175} = \frac{8}{175}$. Bon, ça commence à devenir un peu moche, mais $\sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$, donc $e_4 = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}X^3 - \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

3. On vient en fait de la calculer : en effet, la projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ est donné par $\dfrac{3}{5}X$, et la norme de u'_4 correspond exactement à la distance demandée, qui vaut donc $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.
4. On nous pose une troisième fois de suite la même question, puisqu'il s'agit ici exactement de minimiser la distance entre X^3 et un polynôme quelconque de degré 2, pour la distance associée au produit scalaire étudié dans l'exercice. Cette distance minimale est celle de X^3 à son projeté, qui vaut donc $\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.
5. Voici les courbes (la fonction cube est en bleu, bien sûr) :



Les calculs précédents prouvent que la droite linéaire tracée en rouge est la courbe de degré 2 qui s'approche le plus de celle de la fonction cube (au sens de la distance introduite via le produit scalaire). Ce n'est effectivement pas délirant, mais ce qui peut paraitre étonannt, c'est qu'on ne peut pas obtenir mieux en ajoutant un terme de degré 2, la distance minimale étant en fait obtenue pour une courbe de degré 1.

Exercice 5 (***)

Il va falloir démontrer les deux implications. Commençons par la plus simple : si p est un projecteur orthogonal, on sait que, pour tout vecteur $u \in E$, $p(u)$ et $u - p(u)$ sont orthogonaux, donc le théorème de Pythagore permet d'affirmer que $\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2 \geqslant \|p(u)\|^2$, donc $\|u\| \geqslant \|p(u)\|$. Supposons maintenant que p est un projecteur non orthogonal. Notons classiquement F et G les sous-espaces sur lequel et parallèlement auquel p effectue une projection, on a donc par hypothèse $G^\perp \neq F$. Prenons alors un vecteur $u \in G^\perp \backslash F$. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires (puisque p est tout de même un projecteur !), on peut décomposer u sous la forme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Bien sûr, $u \perp u_G$ puisque $u \in G^\perp$. De plus, $p(u) = u_F = u - u_G$, donc $\|p(u)\|^2 = \|u - u_G\|^2 = \|u\|^2 + \|u_G\|^2$. Or, le vecteur u_G ne peut pas être nul puisqu'on a supposé que u n'appartenait pas à F. On obtient donc l'inégalité $\|p(u)\|^2 > \|u\|^2$, ce qui prouve qu'un projecteur qui n'est pas orthogonal ne peut pas satisfaire l'inégalité souhaitée pour tout vecteur de E.

Exercice 6 (**)

Il s'agit sans surprise d'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, mais encore faut-il réussir à choisir les bons vecteurs. On se place donc dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, et on pose $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ (ces deux définitions sont bien valides dans la mesure où a supposé tous les réels x_i strictement positifs). On calcule alors $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ par hypothèse, $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ (la quantité qu'on cherche justement à minorer), et $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \times \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz (élevée au carré) donne alors exactement $n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$. De plus, on sait qu'il y aura égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, donc s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sqrt{x_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_i}}$, ce qui impose donc que tous les réels x_i soient égaux (puisqu'ils sont tous égaux à λ), et plus précisément, puisque leur somme doit être égale à 1, que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 7 (**)

1. Il s'agit bien sûr d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz (ce sera le cas dans toutes les questions de cet exercice). On se place ici dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire canonique, et on pose $u = \left(\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}}\right)$ (vecteur qui possède bien $n+1$ coordonnées) et $v = (1, 1, \dots, 1)$. On calcule alors $\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (formule bien connue depuis le chapitre de dénombrement, et même un peu avant), $\|v\|^2 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, et $u \cdot v = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}$. La formule demandée est donc directement obtenue à l'aide de Cauchy-Schwartz.
2. On se place cette fois sur $\mathbb{R}^n$ (toujours muni du produit scalaire canonique), et on pose $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^k}\right)$. On calcule aisément $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$, $u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}$, et $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} < \frac{1}{3}$. On en déduit, en appliquant bien sûr Cauchy-Schwartz (élevée au carré) l'inégalité demandée, qui ne peut d'ailleurs jamais être une égalité puisqu'on a toujours une inégalité stricte sur la norme de v.
3. On se place cette fois-ci dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire intégrale $f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$, et on pose $u(t) = f(t)^{\frac{3}{2}}$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ (la fonction f étant supposée strictement positive, ça ne pose aucun problème). On applique alors Cauchy-Schwartz pour obtenir trivialement l'inégalité souhaitée : $\|u\|^2 = \int_0^1 f^3(t)\, dt$, $\|v\|^2 = \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\, dt$ et $u \cdot v = \int_0^1 f(t)\, dt$ (comme pour l'exemple précédent, l'inégalité est élevée au carré pour obtenir celle

de l'énoncé).

4. C'est la même astuce que dans l'exercice 6 concernant le choix des fonctions à utiliser. On se place bien sûr sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire intégral $f \cdot g = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$, et on pose $u(t) = \sqrt{f(t)}$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Étant continue et ne s'annulant jamais, f est donc de signe constant sur $[a,b]$ (sinon, le théorème des valeurs intermédiaires permettrait de prouver la présence d'une valeur d'annulation de f). Elle ne peut pas être strictement négative sur tout l'intervalle puisque $\int_a^b f(t)\ dt = 1$ par hypothèse, elle est donc strictement positive, ce qui justifie la définition des fonctions u et v. On calcule alors $\|u\|^2 = \int_a^b f(t)\ dt = 1$, $\|v\|^2 = \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt$, et $u \cdot v = \int_a^b 1\ dt = b - a$. L'inégalité demandée en découle, en élevant au carré l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On aura égalité si et seulement si les fonctions u et v sont proportionnelles, donc si $\forall t \in [a,b]$, $\sqrt{f(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(t)}}$, pour une certaine constante λ qui doit donc être simultanément égale à toutes les valeurs de $f(t)$. La fonction f est alors constante égale à λ, et l'hypothèse $\int_a^b f(t)\ dt = 1$ impose $\lambda(b-a) = 1$, soit $\lambda = \frac{1}{b-a}$. C'est exactement la « même » conclusion que dans l'exercice 6.

Exercice 8 (***)

1. L'application φ est symétrique, et linéaire à gauche en exploitant la linéarité de la dérivation et celle de l'intégrale, donc bilinéaire. La positivité est également facile : $f \cdot f = \int_0^1 f^2(t) + f'^2(t)\ dt \geqslant 0$ en tant qu'intégrale de fonction positive, et cette intégrale ne peut être nulle que si, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = f'(t) = 0$, ce qui implique évidemment la nullité de f. L'application φ est donc un produit scalaire sur E.
2. Le sous-espace vectoriel G étant de dimension finie (on sait bien résoudre l'équation différentielle définissant G, et on sait donc que $G \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est de dimension 2), le cours nous assure que l'orthogonal de G en est un supplémentaire. Il suffit donc de vérifier que $F = G^{\perp}$. Soit $f \in F$ et $g \in G$, on calcule donc $f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\ dt$. Effectuons une IPP sur le deuxième produit de l'intégrale, en dérivant g et en intégrant f, pour obtenir $f \cdot g = [f(t)g'(t)]_0^1 + \int_0^1 f(t)g(t) - f(t)g''(t)\ dt$. Mais l'hypothèse $f(0) = f(1) = 0$ fait que le crochet s'annule, et l'hypothèse $g'' = g$ fait qu'il ne reste plus rien dans l'intégrale, donc $f \cdot g = 0$. Cela prouve que $G \subset F^{\perp}$ mais n'est pas tout à fait suffisant. Comme on va de toute façon en avoir besoin pour la question suivante, prouvons en plus que $E = F + G$, ce qui prouvera que $G = F^{\perp}$ (puisque G sera alors supplémentaire de F). Soit donc $f \in E$, qu'on souhaite décomposer en $f = f_1 + g$, avec $f_1(0) = f_1(1) = 0$ et $g = a \operatorname{ch} + b \operatorname{sh}$. On doit alors avoir $f(0) = g(0) = a$, et $f(1) = g(1) = a \operatorname{ch}(1) + b \operatorname{sh}(1)$, donc $b = \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}$. Réciproquement, si on pose $g(t) = f(0)\operatorname{ch}(t) + \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}(t)$ et $f_1(t) = f(t) - g(t)$, on aura bien $g \in G$ (c'est une combinaison linéaire des fonctions ch et sh) et $f_1 \in F$ par construction. Ceci achève de prouver que $F + G = E$, et donc que $G = F^{\perp}$.
3. On a fait le calcul à la question précédente : en notant p cette projection, $p(f) = g$, avec $g(t) = f(0)\operatorname{ch}(t) + \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch}(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}(t)$.

4. (a) Posons donc, histoire de ne pas compliquer inutilement les choses, $f_0(t) = (b-a)t + a$, qui vérifie bien $f_0(0) = a$ et $f_0(1) = b$, et est bien sûr continue. D'après les questions précédentes, $p(f_0) = f_1$, avec $f_1(t) = (b-a)t + a - b\,\mathrm{ch}(t) - \dfrac{b - a\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}(t)$. Il est évident que toutes les fonctions de la forme $f_0 + h$, avec $h \in F$, appartiennent à $E_{a,b}$ puisqu'elles sont sommes de fonctions continues et vérifient $f_0(0) + h(0) = a$ et $f_0(1) + h(1) = b$. Réciproquement, si $f \in E_{a,b}$, alors $h = g - f_0$ s'annule en 0 et en 1 donc appartient à F, ce qui prouve que $f = f_0 + h$ pour une certaine fonction $h \in F$. On a ainsi prouvé que $E_{a,b}$ était un sous-espace affine de E, de direction F.

   (b) Si $f \in E_{a,b}$, on peut écrire d'après la question précédente $f = f_0 + h$, puis on peut à décomposer f_0 dans $F \oplus G$ sous la forme $f_1 + g$, avec $g \in G$ et $f_1 \in F$. Autrement dit, $f = g + f_1 + h$, et en appliquant le théorème de Pythagore, $\|f\|^2 = \displaystyle\int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))\,dt = \|g\|^2 + \|f_1 + h\|^2 \geqslant \|g\|^2$. Cette inégalité sera une égalité si $h = -f_1$, et on en déduit que la borne inférieure recherchée vaut $\|g\|^2$, avec $g(t) = f_0(t) - f_1(t) = a\,\mathrm{ch}(t) + \dfrac{b - a\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}(t)$, donc, en réutilisant l'astuce de calcul de la question 2, notre borne est égale à $m = \displaystyle\int_0^1 g^2(t) + g'^2(t)\ dt = [g(t)g'(t)]_0^1 + \int_0^1 g^2(t) - g(t)g''(t)\ dt = g(1)g'(1) - g(0)g'(0) = b \times \left(a\,\mathrm{sh}(1) + \dfrac{b\,\mathrm{ch}(1) - a\,\mathrm{ch}^2(1)}{\mathrm{sh}(1)}\right) - a \times \dfrac{b - a\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}$. En se souvenant que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, on simplifie en $m = \dfrac{b(b\,\mathrm{ch}(1) - a) - a(b - a\,\mathrm{ch}(1))}{\mathrm{sh}(1)} = \dfrac{(a^2 + b^2)\,\mathrm{ch}(1) - 2ab}{\mathrm{sh}(1)}$. Fascinant.

Exercice 9 (**)

1. Allons-y pour les vérifications d'usage : l'application est triviale symétrique et linéaire à gauche (toutes les dérivées de nos polynômes sont définies et les applications $P \mapsto P^{(k)}(0)$ sont linéaires), donc bilinéaire. De plus, $P \cdot P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (P^{(k)}(0))^2 \geqslant 0$, et ce produit scalaire ne peut être nul que si $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $P^{(k)}(0) = 0$. Le réel 0 est alors racine de P de multiplicité (au moins) $n+1$, ce qui est impossible pour un polynôme appartenant à E. Notre application est donc définie positive, c'est bien un produit scalaire.
2. On rappelle que, si $P = X^i$, $P^{(k)} = \dfrac{i!}{(i-k)!}X^{i-k}$ (formule valable si $k \leqslant i$, qui se démontre par une récurrence facile si on souhaite vraiment être hyper rigoureux). On en déduit immédiatement que $(X^i)^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq i$, et $(X^i)^{(i)}(0) = i!$. Le calcul est ensuite trivial : $X^i \cdot X^j = 0$ si $i \neq j$ et $X^i \cdot X^i = (i!)^2$.
3. Les calculs de la question précédente prouvent que la base canonique est déjà orthogonale, mais pas orthonormale puisque $\|X^i\|^2 = (i!)^2$. La normalisation est ici immédiate, la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de Z pour notre produit scalaire.
4. On connait une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ (c'est la même qu'à la question précédente, mais avec un indice i qui ne varie qu'entre 0 et k), il faut donc calculer $P \cdot \dfrac{X^i}{i!} = P^{(i)}(0)$ (un seul terme est non nul dans la somme, et après division de X^i par $i!$, on multiplie bien $P^{(i)}(0)$ par 1) pour en déduire le projeté orthogonal demandé, qui est égal à $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{P^{(i)}(0)}{i!}X^i$. Cette formule devrait vous rappeler quelque chose : il s'agit exactement du polynôme de Taylor d'ordre k associé au polynôme P en 0.

Exercice 10 (*)

Commençons par déterminer une base de F en résolvant le système qui permet de le définir : la somme des deux équations donne $2x+2z=0$, donc $z=-x$, et en reportant ensuite dans la première équation, on en déduit $t=-y$. On ne peut pas faire mieux : $F=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$. Les deux vecteurs obtenus sont orthogonaux, il suffit donc de les normer pour obtenir une base orthonormale de F : $\|(1,0,-1,0)\|=\|(0,1,0,-1)\|=\sqrt{2}$, donc $(e_1,e_2)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ est une base orthonormale de F. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et $p(u)$ le **projeté** orthogonal de u sur F (on s'occupera du symétrique après), alors $p(u)=\langle u,e_2\rangle e_1+\langle u,e_2\rangle e_2=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)e_1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)e_2=\frac{1}{2}(x-z,y-t,z-x,t-y)$. En notant s la symétrie orthogonale par rapport à F, on sait alors que $s=2p-\mathrm{id}$, donc $s(x,y,z,t)=2p(x,y,z,t)-(x,y,z,t)=(-z,-t,-x,-y)$. Dans la base canonique, la matrice demandée est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A-t-on besoin de refaire un calcul pour la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$? Non, sûrement pas, si on note s' cette deuxième symétrie, on a simplement $s'=-s$ (puisque $s'=2(\mathrm{id}-p)-\mathrm{id}=\mathrm{id}-2p$). La matrice est donc la même, mais avec des 1 aux emplacements des -1.

Exercice 11 (*)

1. Commençons par remarquer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de F. Elle n'est pas orthonormale, mais orthogonale, ce qui est déjà bien. Il suffit de diviser chacune des deux matrices par leur norme, qui vaut $\sqrt{2}$ à chaque fois, pour obtenir une base orthonormale.
2. La formule du cours donne $p(M)=\frac{1}{2}M\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}M\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}$, en notant bien sûr, a, b, c et d les coefficients de la matrice M.
3. Par définition, cette distance est égale à $\|M-p(M)\|$, où $p(M)$ est la matrice définie à la question précédente, donc $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|=\sqrt{2}$.

Exercice 12 (**)

1. Il faut bien sûr choisir le bon espace, et le munir du bon produit scalaire. On va simplement se placer dans $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et prendre le produit scalaire intégral habituel par E, défini par $f\cdot g=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. On constate alors qu'on cherche à minimiser la valeur de $\|f-g\|^2$, avec $f(t)=t$ (qui est certainement une fonction de E) et $g(t)=a\sqrt{t}+b$, autrement dit $g\in F=\mathrm{Vect}(t\mapsto\sqrt{t},1)$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace E. On aura besoin de calculer le projeté orthogonal de f sur F pour répondre à la question, commençons donc par trouver une base orthonormale de F. En notant $h(t)=\sqrt{t}$, $(1,h)$ est par définition une base de F. On calcule alors $\|1\|^2=\int_0^1 1\,dt=1$, notre premier vecteur est déjà normé. Puis $1\cdot h=\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$. On va donc poser $h'(t)=\sqrt{t}-\frac{2}{3}$, puis calculer $\|h'\|^2=\|h\|^2-\frac{4}{9}=\int_0^1 t\,dt-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$. On pose donc finalement $k(t)=3\sqrt{2t}-2\sqrt{2}$,

et $(1,k)$ est une base orthonormale de F. On peut alors calculer le projeté orthogonal de f sur F, via $p(f)=(f\cdot 1)1+(f\cdot k)k$. Encore un peu de calcul : $f\cdot 1=\int_0^1 t\ dt=\frac{1}{2}$, et $f\cdot k=\int_0^1 3\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}t\ dt=3\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1-\sqrt{2}=\frac{6}{5}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$. On a donc $p(f)=\frac{1}{2}+\frac{6}{5}\sqrt{t}-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}\sqrt{t}-\frac{3}{10}$. Il ne reste plus qu'à calculer la distance demandée : $d(f,F)^2=\|f-p(f)\|^2=\|f\|^2-\|p(f)\|^2$ (puisque les vecteurs sont par construction l'hypothènuse et un des côtés d'un triangle rectangle, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore). Or, $\|f\|^2=\int_0^1 t^2\ dt=\frac{1}{3}$, et $\|p(f)\|^2=\int_0^1\left(\frac{6}{5}\sqrt{t}-\frac{3}{10}\right)^2\ dt=\int_0^1\frac{36}{25}t-\frac{18}{25}\sqrt{t}+\frac{9}{100}\ dt=\frac{18}{25}-\frac{36}{75}+\frac{9}{100}=\frac{72-48+9}{100}=\frac{33}{100}$. Finalement, $m=\frac{1}{3}-\frac{33}{100}=\frac{1}{300}$. C'est vraiment pas beaucoup.

2. Bon, comme vous vous en doutez, la deuxième méthode sera légèrement brutale, on commence d'abord par calculer tout bêtement $I=\int_0^1(t-a\sqrt{t}-b)^2\ dt=\int_0^1 t^2+a^2t+b^2-2at^{\frac{3}{2}}-2bt+2ab\sqrt{t}\ dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{4}{5}a-b+\frac{4}{3}ab$. Comme le minimum de cette expression de deux variables n'est pas évident à visualiser, on va faire apparaitre des carrés via des mises sous formes canoniques un peu violentes. On commence par regrouper $b^2-b+\frac{4}{3}ab$ comme le début du développement de $\left(b-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2=b^2-b+\frac{4}{3}a+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}a$, pour obtenir $I=\frac{1}{3}+\left(b-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{4}{9}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}a^2-\frac{4}{5}a=\frac{1}{12}+\left(b-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{1}{18}a^2-\frac{2}{15}a$. Il est temps de faire apparaitre une deuxième forme canonique pour englober nos deux derniers termes : $I=\frac{1}{12}+\left(b-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{a}{3\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2-\frac{2}{25}=\frac{1}{300}+\left(b-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{a}{3\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2$. Chacun des deux carrés étant bien sûr positif, il est déjà clair que I ne peut pas être rendue inférieure à $\frac{1}{300}$. Mais on peut même constater que $m=\frac{1}{300}$, il suffit en effet de s'arranger pour annuler les deux carrés pour obtenir cette valeur, en imposant d'abord $\frac{a}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$, donc $a=\frac{6}{5}$, puis $b-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=0$, donc $b=-\frac{3}{10}$. On retrouve bien sûr exactement la même chose qu'avec la méthode de projection orthogonale.

3. On va bien sûr utiliser les deux mêmes méthodes. L'espace E et le produit scalaire sont les mêmes que pour les questions précédentes. On va par contre désormais poser $f(x)=x^4$, et $F=\mathbb{R}_1[X]$. On a déjà constaté plus haut que 1 était normé pour ce produit scalaire, calculons donc $X\cdot 1=\int_0^1 x\ dx=\frac{1}{2}$, puis posons $h(x)=x-\frac{1}{2}$, et calculons enfin $\|h\|^2=\int_0^1 x^2-x+\frac{1}{4}\ dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, avant de poser $k(x)=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$. La famille $(1,k)$ est une base orthonormale de F. On cherche à calculer le projeté orthogonal de f sur F. On a besoin pour cela de $f\cdot 1=\int_0^1 x^4\ dx=\frac{1}{5}$, et $f\cdot k=\int_0^1 2\sqrt{3}x^5-\sqrt{3}x^4\ dx=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Le projeté recherché est donc $p(f)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$. Comme précédemment, on calcule enfin $m=\|f\|^2-\|p(f)\|^2=\frac{1}{9}-\int_0^1\frac{16}{25}x^2-\frac{8}{25}x+\frac{1}{25}\ dx=\frac{1}{9}-\frac{16}{75}+\frac{4}{25}-\frac{1}{25}=\frac{25-48+27}{225}=\frac{4}{225}$.

Passons à la méthode brutale : $I=\int_0^1(x^4-ax-b)^2\ dx=\int_0^1 x^8+a^2x^2+b^2-2ax^5-2bx^4+$

$2abx\ dx = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + ab$. Comme tout à l'heure, on va faire apparaitre des carrés en commençant par éliminer les termes faisant intervenir b : $I = \frac{1}{9} + \left(b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{5}a - \frac{1}{25} + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}a = \frac{16}{225} + \left(b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{12}a^2 - \frac{2}{15}a = \frac{16}{225} + \left(b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{15}\right)^2 - \frac{12}{225} = \frac{4}{225} + \left(b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{15}\right)^2$. Comme tout à l'heure, on retrouve le minimum égal à $\frac{4}{225}$, atteint lorsque $a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, et $b = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{5}$.

Exercice 13 (***)

1. Si on note $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ les cooordonnées du vecteur u_i dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, on sait que $M = (\lambda_{j,i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (attention tout de même à l'inversion des indices). Le produit scalaire $u_i \cdot u_j$ sera alors obtenu en faisant le produit de la i-ème colonne de M par sa j-ème colonne, autrement dit par la j-ème ligne de sa transposée. On en déduire directement que $M^\top M$ est égale à la matrice de Gram de la famille.
2. Supposons $v \in \ker(M)$, alors (en écrivant les coordonnées de v sous forme de vecteur-colonne) $Mv = 0$, donc $M^\top Mv = 0$ et v appartient également au noyau de $M^\top M$. Réciproquement, si $v \in \ker(M^\top M)$, alors $M^\top Mv = 0$, donc $v^\top M^\top Mv = 0$, ou encore $(Mv)^\top(Mv) = 0$. Or, ce dernier calcul n'est autre que celui de la norme au carré du vecteur Mv, qui ne peut donc être nulle que si $Mv = 0$, donc $v \in \ker(M)$. On a bien prouvé l'équivalence entre l'appartenance aux deux noyaux, qui sont donc égaux. Par définition, la matrice M a un rang égal à celui de la famille de ses vecteurs-colonnes, dont à celui de la famille $(u_1, \dots, u_n)$. Or, l'égalité des noyaux et le théorème du rang prouvent que $\mathrm{rg}(M^\top M) = \mathrm{rg}(M)$, ces deux rangs sont donc égaux à celui de notre famille de vecteurs.
3. Si la famille n'est pas libre, alors la matrice M n'est pas inversible, donc $M^\top M$ non plus d'après la question précédente, ce qui prouve que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$. Réciproquement, si la famille est libre, les deux matrices M et $M^\top M$ sont inversbles, et le déterminant de Gram non nul.
4. C'est immédiat, puisque dans ce la dernière ligne (ou la dernière colonne) de la matrice de Gram ne contient que des 0, à part le dernier coefficient diagonal qui est égal à $u_n \cdot u_n = \|u_n\|^2$. Il suffit donc de développer par rapport à cette dernière ligne pour obtenir la formule souhaitée.
5. On peut décomposer u sous la forme $u = g + h$, avec $g \in F$ et $h \in F^\perp$. La dernière colonne de la matrice de Gram de la famille de vecteurs $(f_1, f_2, \dots, f_k, u)$ est alors égale à $\begin{pmatrix} g \cdot f_1 \\ g \cdot f_2 \\ \vdots \\ g \cdot f_k \\ \|u\|^2 \end{pmatrix}$. Comme de plus $\|u\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$ (théorème de Pythagore), on peut décomposer cette dernière colonne somme de $\begin{pmatrix} g \cdot f_1 \\ g \cdot f_2 \\ \vdots \\ g \cdot f_k \\ \|g\|^2 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|h\|^2 \end{pmatrix}$. Le calcul du déterminant étant linéaire par rapport à cette dernière colonne, on en déduit que $G(f_1, \dots, f_k, u) = G(f_1, \dots, f_k, g) + \|h\|^2 \times G(f_1, \dots, f_k)$ (on applique la question précédente pour le deuxième terme). Le premier déterminant du membre de droite est nul puisque $g \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Dans la mesure où $d(u, F)^2 = \|h\|^2$, on en déduit donc la formule souhaitée.

Exercice 14 (***)

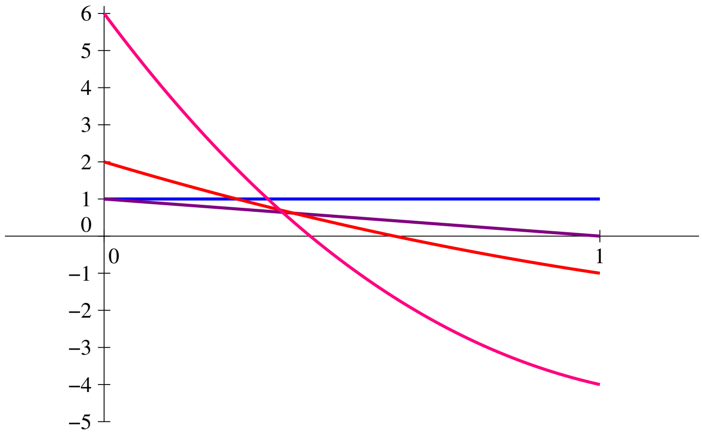
On va procéder par récurrence et par l'absurde. Commençons avec le cas $n = 1$. On suppose donc avoir réussi à trouver trois vecteurs (u, v, w) de la droite réel tels que $u \cdot v < 0$, $u \cdot w < 0$ et $v \cdot w < 0$. Mais comme ici le produit scalaire est simplement égal (à un facteur près) au produit des simples nombres réels que sont u, v et w, il y en a forcément deux sur les trois qui sont de même signe et ont donc un produit scalaire positif, c'est absurde. Supposons maintenant la propriété démontrée en dimension $n - 1 \geqslant 1$, et supposons également avoir trouvé $n + 2$ vecteurs $(u_1, \dots, u_{n+2})$ dans un espace de dimension $n + 1$ vérifiant nos hypothèses. Le vecteur u_{n+2} ne peut pas être nul (sinon il aurait un produit scalaire nul avec tous les autres) donc $u_{n+2}^{\perp}$ est un sous-espace de dimension $n - 1$ dans notre espace vectoriel. Appelons-le F. Pour tout vecteur u_i, avec $1 \leqslant i \leqslant n + 1$, on peut écrire $u_i = v_i + \lambda_i u_{n+2}$, avec $v_i \in F$. De plus, $u_i \cdot u_{n+2} = \lambda_i \|u_{n+2}\|^2$, donc l'hypothèse sur les produits scalaires strictement négatifs implique que $\lambda_i < 0$. On peut alors calculer, si $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, $u_i \cdot u_j = v_i \cdot v_j + \lambda_i \lambda_j \|u_{n+2}\|^2$. Comme par hypothèse $u_i \cdot u_j < 0$, on aura également $v_i \cdot v_j < 0$. Les vecteurs $(v_1, \dots, v_{n+1})$ vérifient donc notre hypothèse et appartiennent tous à l'espace de dimension $n - 1$ F, c'est aburde. On ne peut donc pas avoir plus de $n + 1$ vecteurs vérifiant nos hypothèses. Il est par contre assez facile de créer des familles de $n + 1$ vecteurs vérifiant l'hypothèse dans, par exemple dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique. Dans $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple choisir $u_1 = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $u_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $u_4 = (0, 0, 1)$. Je vous laisse faire un dessin pour comprendre le principe, puis le généraliser en dimension supérieure.

Exercice 15 (***)

1. On calcule donc successivement :

   - $h_0(x) = f_0(x)e^x = 1$.
   - $f_1(x) = xe^{-x}$, donc $f_1'(x) = (1 - x)e^{-x}$ puis $h_1(x) = 1 - x$.
   - $f_2(x) = x^2 e^{-x}$, donc $f_2'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ et $f_2''(x) = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x}$, puis enfin $h_2(x) = x^2 - 4x + 2$.
   - $f_3(x) = x^3 e^{-x}$, donc $f_3'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x}$, $f_3''(x) = (6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)e^{-x}$, $f_3'''(x) = (6 - 12x + 3x^2 - 6x + 6x^2 - x^3)e^{-x}$, donc $h_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$.

   Pas besoin de calculer pour justifier les allures des courbes de h_0 et h_1. La fonction h_2 a pour dérivée $h_2'(x) = 2x - 4$, elle est donc décroissante sur $[0, 1]$, avec $h_2(0) = 2$ et $h_2(1) = -1$. Enfin, la fonction h_3 a pour dérivée $h_3'(x) = -3x^2 + 18x - 18 = -3(x^2 - 6x + 6)$. Le trinôme entre parenthèses a pour discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$ et s'annule donc pour $x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} > 1$, et $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} > 1$ (on sait que $2\sqrt{3} < 4$), donc notre dérivée est négative sur tout l'intervalle $[0, 1]$ (ne pas oublier le facteur -3), et h_3 y est donc décroissante, avec $h_3(0) = 6$ et $h_3(1) = -4$. Il faut bien admettre que cette étude n'a strictement aucun intérêt, mais donnons quand même les courbes demandées par acquit de conscience (comme vous l'auriez deviné tout seuls, la courbe de h_0 est en bleu, celle de h_1 en violet, h_2 en rouge et h_3 en rose) :



2. Il suffit d'appliquer la formule de Leibniz pour calculer explicitement $f_n^{(n)}(x)$: on pose $h(x) = x^n$ et $g(x) = e^{-x}$ et on a $f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \times \frac{n!}{k!} x^k$ (on passe le détail du calcul des dérivées de la fonction h, qui se fait par une récurrence classique si on y tient), d'où $h_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{k!} x^k$, qui est certainement un polynôme (de degré n). Les coefficients ne se simplifient pas vraiment plus que dans l'expression donnée.
3. Avant de vérifier les propriétés habituelles, il faut déjà faire une vérification supplémentaire à laquelle vous n'avez pas l'habitude de procéder : celle du fait que $\varphi(P, Q)$ existe pour tous polynômes P et Q. Pour cela, vérifions déjà que $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ existe pour tout entier naturel k, et calculons même sa valeur, qui nous resservira dans la suite de l'exercice. Effectons une IPP en posant $u(t) = t^k$ et $v'(t) = e^{-t}$ (qu'on intègre bien sûr en $v(t) = -e^{-t}$) pour trouver $J_{k,n} = \displaystyle\int_0^n t^k e^{-t}\, dt = [-t^k e^{-t}]_0^n + \int_0^n k t^{k-1} e^{-t}\, dt = -n^k e^{-t} + k J_{k-1,n}$ (en supposant $k \geqslant 1$). On va alors procéder par récurrence pour prouver que $I_k = k!$. Pour $k = 0$, $J_{0,n} = \displaystyle\int_0^n e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^n = 1 - e^{-n}$, qui a bien une limite quand n tend vers $+\infty$, égale à $I_0 = 1 = 0!$. Supposons maintenant que $I_k = k!$, alors le calcul effectué précédemment prouve que $J_{k+1,n} = -n^{k+1} e^{-t} + (k+1) J_{k-1,n}$. Par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_{k,n} = I_k = k!$, et par ailleurs $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} - n^{k+1} e^{-t} = 0$ (croissance comparée classique), donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_{k+1,n} = 0 + (k+1) \times k! = (k+1)!$, ce qui prouve notre hérédité. La linéarité de l'intégrale permet alors de prouver que $\displaystyle\int_0^n R(t) e^{-t}\, dt$ converge vers une limite finie quel que soit le polynôme R, ce qui prouve l'existence de $\varphi(P, Q)$ pour tout couple (P, Q) de polynômes.

   Revenons maintenant aux vérifications usuelles : la symétrie est évidente, la bilinéarité également (via la linéarité de l'intégrale, le passage à la limite ne change rien). La positivité est aussi facile : $\displaystyle\int_0^n P(t)^2 e^{-t}\, dt \geqslant 0$ (puisque l'exponentielle par laquelle on multiplie notre carré est positive), donc le passage à la limite conserve la positivité. Si on suppose maintenant $\varphi(P, P) = 0$, comme la suite $\left(\displaystyle\int_0^n P^2(t) e^{-t}\, dt \right)$ est positive et croissante (on ajoute une intégrale de fonction positive si on remplace la borne supérieure par $n+1$) et a par hypothèse pour limite 0, la suite est nécessairement nulle, ce qui prouve que $\forall t \in [0, +\infty[$, $P^2(t) e^{-t} = 0$, donc $P(t) = 0$. Cela fait une grosse infinité de racines pour notre polynôme P, qui doit donc être nul. Notre application φ est bien bilinéaire, symétrique et définie positive, c'est un produit scalaire sur E.

4. Pour alléger un peu les calculs, on se permettra de faire des IPP directement sur des intégrales à borne infinie. On devrait théoriquement les faire sur l'intervalle $[0, n]$ avant de faire tendre n vers $+\infty$, mais dans la mesure où on ne manipulera des fonctions du type « polynômes $\times e^{-t}$ », les crochets auront toujours une limite nulle en $+\infty$ (par croissance comparée usuelle), ce qui justifie le calcul. En se rappelant que $h_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$, on peut écrire, pour un polynôme quelconque P, que $\varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t) f_n^{(n)}(t)\ dt$. Effectuons une IPP sur cette intégrale, en dérivant le polynôme P et en intégrant $f_n^{(n)}$ sous la forme $f_n^{(n-1)}$, pour obtenir $\varphi(P, h_n) = [P(t)f_n^{(n-1)}(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} P'(t)f_n^{(n-1)}(t)\ dt$. Or, $f_n^{(n-1)}$ est de la forme $t \mapsto Q(t)e^{-t}$, avec Q qui est un polynôme dont le coefficient constant est nul (il suffit d'écrire la formule de Leibniz pour le produit $t^n e^{-t}$, le facteur t^n sera dérivé au maximum $n-1$ fois, ce qui ne peut pas faire apparaitre de coefficient constant), donc $Q(0) = 0$, et $\varphi(P, h_n) = -\int_0^{+\infty} P'(t)f_n^{(n-1)}(t)\ dt$. On peut reproduire ce calcul $n-1$ fois (les crochets s'annuleront toujours puisqu'ils feront intervenir des dérivées de la fonction f_n d'ordre de plus en plus petit, qui s'annulent toutes en 0) pour finir par trouver $\varphi(P, h_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)f_n(t)\ dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\ dt$. En particulier, si P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, $P^{(n)} = 0$ et on en déduit immédiatement que $\varphi(P, h_n) = 0$. On a donc $\varphi(h_p, h_n) = 0$ dès que $p < n$, et donc, par symétrie du produit scalaire, dès que $p \neq n$. La famille $(h_0, \dots, h_n)$ est donc bien orthogonale.

5. On a besoin de calculer $\varphi(h_n, h_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t}\ dt$. On a calculé explicitement h_n à la question 2, son coefficient dominant est égal à $(-1)^n$. La dérivée n-ème de h_n est donc simplement égale à $(-1)^n \times n!$, et $\varphi(h_n, h_n) = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt$. On a bien fait de calculer cette denrière intégrale en début d'exercice, on peut conclure immédiatement : $\varphi(h_n, h_n) = n! \times n! = (n!)^2$, donc $\|h_n\| = n!$. Autrement dit, puisque la famille était déjà orthogonale, $\mathcal{B}_n = \left(\frac{h_k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ.

6. La question précédente nous assure que $\left(h_0, h_1, \frac{h_2}{2}\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$, donc le projeté orthogonal de X^3 sur ce sous-espace est défini par $p(X^3) = \varphi(X^3, h_0)h_0 + \varphi(X_3, h_1)h_1 + \frac{1}{4}\varphi(X^3, h_2)h_2$. Calculons alors $\varphi(X^3, h_0) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\ dt = I_3 = 6$, puis $\varphi(X^3, h_1) = \int_0^{+\infty} t^3(1-t)\ dt = I_3 - I_4 = -18$, et enfin $\varphi(X^3, h_2) = \int_0^{+\infty} t^3(t^2 - 4t + 2)\ dt = I_5 - 4I_4 + 2I_3 = 120 - 96 + 12 = 36$. Finalement, $p(X^3) = 6 - 18(1 - X) + 9(X^2 - 4X + 2) = 9X^2 - 18X + 6$. Là, normalement, on se rend compte qu'on aurait pu immédiatement obtenir ce polynôme en exploitant le fait que $h_3 = -X^3 + 9X^2 - 18X + 6$ est orthogonal à h_0, h_1 et h_2, mais un petit calcul supplémentaire ne fait jamais de mal. Reste à conclure : la distance demandée est égale à $\|X^3 - p(X^3)\| = \| - h_3\| = 6$.

Exercice 16 (*)

Vérifions déjà que la première colonne imposée est compatible avec l'orthogonalité de la matrice : $\frac{1}{7}\|(3, -2, 6)\| = \frac{1}{7}\sqrt{9 + 4 + 36} = 1$, jusque-là tout va bien. Pour que la deuxième colonne soit aussi « de norme 1 », il faudra déjà imposer $a = \pm 3$. Or, on veut aussi que le produit scalaire des deux premières colonne soit nul, donc (sans se préocupper du facteur $\frac{1}{7}$ qui n'a pas d'importance ici)

$6+12+6a=0$, soit $a=-3$ (qui donne donc bien une norme 1 au deuxième vecteur). Pour la dernière colonne, on peut écrire un système pour que les produits scalaires avec les deux autres colonnes soient nuls : $3b-2c+6d=2b-6c-3d=0$, donc (en effectuant L_1+2L_2) $7b-14c=0$, dont on déduit $b=2c$ puis $d=-\frac{1}{3}b$. Autrement dit, $(b,c,d)=\lambda(6,3,-2)$. La norme égale à 1 impose sans surprise $\lambda=\pm\frac{1}{7}$, mais il reste à déterminer le signe de λ. Pour cela, on calcule le déterminant de la matrice obtenue pour $\lambda=1$ pour voir s'il est positif : $\det(A)=\frac{1}{343}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & 3 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$. On effectue par exemple l'opération $C_1 \Leftarrow C_1+2C_2$ avant de développer par rapport à C_1 : $\det(A)=\frac{1}{343}\begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -14 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{49}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{49}\left(\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right)=\frac{1}{49}(21+28)=1$. Parfait, la matrice est donc directe, c'est l'unique matrice répondant aux conditions de l'énoncé.

Exercice 17 (**)

1. On commence bien sûr par vérifier que les colonnes sont de norme 1 : $\frac{1}{4^2}\|(3,1,\sqrt{6})\|^2=\frac{9+1+6}{16}=1$, même calcul pour la deuxième colonne, et $\frac{1}{16}\|(-\sqrt{6},\sqrt{6},2)\|^2=\frac{6+6+4}{16}=1$. Ensuite, on vérifie l'orthogonalité : $(3,1,\sqrt{6})\cdot(1,3,-\sqrt{6})=3+3-6=0$, $(3,1,\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{6},\sqrt{6},2)=-3\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}=0$, et $(1,3,-\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{6},\sqrt{6},2)=-\sqrt{6}+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}=0$. La matrice A est donc une matrice orthogonale.

   Calculons désormais son déterminant (au facteur $4^3=64$ près) en additionnant les deux premières lignes avant de développer par rapport à la première : $64\det(A)=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}=4\left(\begin{vmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{vmatrix}\right)=4\times(12+4)=64$, ce qui prouve que $\det(A)=1$. La matrice A est donc une matrice de rotation.

   Déterminons l'axe de la rotation r correspondante. On cherche les vecteurs $u=(x,y,z)$ invariants par r, dont les coordonnées sont donc solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & \sqrt{6}z & = & 4x \\ x & + & 3y & - & \sqrt{6}z & = & 4y \\ -\sqrt{6}x & + & \sqrt{6}y & + & 2z & = & 4z \end{array}\right.$. Les deux premières lignes sont équivalentes et donnent $\sqrt{6}z=x-y$. Comme la dernière équation peut s'écrire $-6x+6y-2\sqrt{6}z=0$, on peut remplacer pour obtenir $-6x+6y-2x+2y=0$, soit tout bêtement $x=y$, puis $z=0$. Autrement dit, l'axe de la rotation est tout bêtement $F=\text{Vect}((1,1,0))$.

   On va enfin chercher l'angle θ de la rotation. On peut déjà exploiter la trace pour gagner un peu de temps : $2\cos(\theta)+1=\text{Tr}(A)=\frac{8}{4}=2$, donc $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$. On choisit ensuite un vecteur orthogonal à l'axe de la rotation, par exemple $u=(0,0,1)$ (en plus, u est normé). On calcule $f(u)=\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2)$. Comme le vecteur $a=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ est un vecteur normé directeur de l'axe de rotation, $\sin(\theta)=\det(u,f(u),a)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{6} & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix}=$

$\dfrac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C'est cohérent avec la valeur obtenue pour le cosinus. On peut maintenant conclure : r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour de l'axe $F = \text{Vect}((1,1,0))$.

2. On commence évidemment par vérifier que la matrice est orthogonale. En oubliant le facteur $-\dfrac{1}{9}$, on a bien $\|(-8,4,1)\|^2 = 64+16+1 = 81 = 9^2$, $\|(4,7,4)\|^2 = 16+49+16 = 81$, et $\|(1,4,-8)\|^2 = 1+16+49 = 81$. Les produits scalaires sont tous nuls : $(-8,4,1)\cdot(4,7,4) = -32+28+4 = 0$, $(-8,4,1)\cdot(1,4,-8) = -8+16-8 = 0$ et $(4,7,4)\cdot(1,4,-8) = 4+28-32 = 0$. La matrice est donc orthogonale.
   On calcule ensuite le déterminant en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1+2L_2$ avant de développer par rapport à cette première ligne : $\det(B) = -\dfrac{1}{729}\begin{vmatrix} 0 & 18 & 9 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{81}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{81}\times\left(-2\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right) = -\dfrac{1}{81}\times(72+9) = -1$. La matrice est donc indirecte, ce qui est plutôt une mauvaise nouvelle puisqu'on ne sait pas forcément à quelle type d'application géométrique cela va correspondre.
   On n'a de toute façon pas d'autre espoir que d'être face à une réflexion, et on va pour le vérifier chercher les points fixes de l'application, en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & 4y & + & z & = & -9x \\ 4x & + & 7y & + & 4z & = & -9y \\ x & + & 4y & - & 8z & = & -9z \end{array}\right.$.
   Miracle, les trois équations sont équivalentes à l'unique condition $x+4y+z = 0$. On peut alors directement conclure que l'application est une réflexion par rapport au plan d'équation $x+4y+z = 0$. En fait, une matrice orthogonale de déterminant -1 qui est également symétrique sera toujours une matrice de réflexion.

Exercice 18 (***)

C'est en fait très simple si on pense à exploiter le bon outil : l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et surtout si on pense à le faire dans le bon espace, à savoir $\mathbb{R}^{n^2}$. Dans cet espace, on considère le vecteur u dont toutes les coordonnées sont égales à 1, qui vérifie donc $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} 1 = n^2$. On pose ensuite simplement $v = (|a_{i,j}|)$ le vecteur contient donc les valeurs absolues de tous les coefficients de la matrice A, ligne par ligne). Ce deuxième vecteur vérifie $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$. En effet, la matrice A étant orthogonale, chacune de ses colonnes est de norme 1, ce qui revient à dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ pour tout indice de colonne j. Enfin, on a $u\cdot v = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$, d'où $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{n^2\times n} = n\sqrt{n}$.

Problème (***)

1. Par définition, $L_0 = P_0 = 1$, puis $L_1 = \dfrac{1}{2}(X^2-1)' = X$, $L_2 = \dfrac{1}{8}(X^4-2X^2+1)'' = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}$, et $L_3 = \dfrac{1}{48}(X^6-3X^4+3X^2-1)''' = \dfrac{5}{2}X^3 - \dfrac{3}{2}X$. Pour les plus courageux, on aurait pu pousser le calcul un peu plus loin, par exemple jusqu'à $P_{10} = \dfrac{1}{256}(46\ 189X^{10} - 109\ 395X^8 +$

$90\,090X^6 - 30\,030X^4 + 3\,465X^2 - 63)$.

2. Puisque L_n est obtenu en dérivant n fois un polynôme de degré $2n$, il sera de degré n. De plus, $(X^2-1)^n$ est un polynôme unitaire, donc $((X^2-1)^n)^{(n)}$ a pour coefficient dominant $\dfrac{(2n)!}{n!}$, et L_n a donc pour coefficient dominant $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$. La famille $(L_0,\dots,L_n)$ est en particulier une famille échelonnée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, c'en est donc une base.
3. Les polynômes P_n étant toujours pairs, la parité de L_n dépend uniquement du nombre de dérivations effectués. Autrement dit, L_n est pair quand n est pair, et impair quand n est impair.
4. On écrit simplement $P_n = (X+1)^n \times (X-1)^n$, puis on applique la formule de Leibniz. On en déduit directement $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(X-1)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k$, comme demandé. Si on évalue cette égalité pour $X=1$, le seul terme non nul est le premier, donc $L(1) = \dfrac{1}{2^n}\times 2^n = 1$. De même, $L(-1) = (-1)^n$ (cette fois-ci, seul le dernier terme est non nul).
5. C'est évident : $P_{n+1} = (X^2-1)^{n+1}$ se dérive en effet en $P'_{n+1} = (n+1)2X(X^2-1)^n = 2(n+1)XP_n$. On en déduit bien sûr, en décalant les indices, que $P'_n - 2nXP_{n-1} = 0$. Or, $(X^2-1)P_{n-1} = P_n$, donc en multipliant cette dernière équation par X^2-1, on obtient bien $(X^2-1)P'_n - 2nXP_n = 0$.
6. Par définition, $L'_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}(P'_{n+1})^{(n+1)} = \dfrac{1}{2^n n!}(XP_n)^{(n+1)}$. On peut appliquer la formule de Leibniz pour calculer $(XP_n)^{(n)} = XP_n(n+1) + (n+1)P_n^{(n)} = 2^n n!(XL'_n + (n+1)L_n)$, dont la formule demandée découle immédiatement. L'autre formule, par contre, nécessaite pas mal de calculs en plus. On commence par constater que $f(L_n) = (X^2-1)L''_n + 2XL'_n = \dfrac{1}{2^n n!}((X^2-1)P_n^{(n+2)} + 2XP_n^{(n+1)})$. Repartons maintenant de la relation $(X^2-1)P'_n - 2nXP_n = 0$ et dérivons-là $n+1$ fois (à coups de formules de Leibniz) pour obtenir $(X^2-1)P_n^{(n+2)} + 2(n+1)XP_n^{(n+1)} + n(n+1)P_n^{(n)} - 2n(n+1)P_n^{(n)} - 2nXP_n^{(n+1)} = 0$. En simplifiant, on a donc $(X^2-1)P_n^{(n+2)} + 2XP_n^{(n+1)} - n(n+1)P_n^{(n)} = 0$. En combinant avec le calcul précédent, on peut donc écrire que $f(L_n) = \dfrac{1}{2^n n!}\times n(n+1)P_n^{(n)} = n(n+1)L_n$.
   Avant de donner la matrice demandée, précisons quand même que f est une application linéaire (c'est évident, le produit par X^2-1 est linéaire et les deux dérivations également), et surtout que c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (en effet, chaque dérivation fait perdre un degré et le produit par X^2-1 en fait gagner deux, le polynôme $f(P)$ a donc un degré au maximum égal à celui de P). Enfin, on a déjà prouvé que $(L_0,\dots,L_n)$ était une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Les calculs précédents montrent que la matrice demandée est simplement diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à $n(n+1)$. Par exemple, pour $n=3$, on aura $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
7. (a) C'est le genre de vérification qu'on a déjà fait trente fois, l'application est bilinéaire et symétrique de façon évidente (linéarité de l'intégrale), $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geqslant 0$, et cette intégrale ne s'annule que si $P^2(t) = 0$ sur tout l'intervalle $[-1,1]$, ce qui n'est le cas que pour le polynôme nul (infinité de racines). L'application φ est donc bien un produit scalaire.
   (b) Par définition, $\varphi(f(P),Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)\,dt$. On peut effectuer une IPP en posant $u = Q$ (donc $u' = Q'$) et $v'(t) = (t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)$, qu'on peut

intégrer en $v(t) = (t^2 - 1)P'(t)$ (puisque c'est en dérivant cette expression qu'on a obtenu v'!). Comme $t^2 - 1$ s'annule à la fois en -1 et en 1, on en déduit que $\varphi(f(P), Q) = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\ dt$. Or, la symétrie du produit scalaire suivie du même calcul nous assure que $\varphi(P, f(Q)) = \varphi(f(Q), P) = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)Q'(t)P'(t)\ dt$. Ceci prouve bien que $\varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q))$.

(c) On peut exploiter la question précédente, combinée avec le calcul de la question 6 : $\varphi(L_k, L_p) = \dfrac{1}{k(k+1)}\varphi(f(L_k), L_p) = \dfrac{1}{k(k+1)}\varphi(L_k, f(L_p)) = \dfrac{p(p+1)}{k(k+1)}\varphi(L_k, L_p)$. Si $k \neq p$, on ne peut pas avoir $\varphi(L_k, L_p) = \dfrac{p(p+1)}{k(k+1)}\varphi(L_k, L_p)$, sauf bien sûr si le produit scalaire $\varphi(L_k, L_p) = 0$. La famille est donc bien orthogonale.

(d) Il faut donc calculer $\varphi(L_n, L_n) = \dfrac{1}{2^{2n}(n!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t)\ dt$. On effectue n IPP successives en dérivant à chaque fois le même morceau (et en intégrant l'autre) pour se retrouver à la fin avec un produit $P_n(t)P_n^{(2n)}(t)$ dans l'intégrale. En cours de route, on aura à calculer des crochets du type $[P_n^{(k)}(t)P_n^{2n-k-1}(t)]_{-1}^{1}$, qui seront tous nuls car -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme P_n et annulent donc les dérivées $P_n^{(k)}$ jusqu'au rang n. Finalement, on a donc $\|L_n\|^2 = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n P_n^{(2n)}(t)\ dt$. Or, P_n étant un polynôme unitaire de degré $2n$, $P_n(2n)(t)$ est constant égal à $(2n)!$. Reste finalement à réussir à calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n\ dt$. Mauvaise nouvelle, ce n'est pas simple ! La méthode la plus classique consiste à effectuer le changement de variable $t = \cos(u)$, pour avoir $dt = -\sin(u)\ du$, $(t^2 - 1)^n = (\cos^2(u) - 1)^n = (-\sin^2(u))^n = (-1)^n \sin^{2n}(u)$. Les bornes deviennent π et 0, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n\ dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\ du = 2(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\ du$. On reconnait là une belle intégrale de Wallis, étudiées par exemple dans le DM10. Je ne vous refais pas le calcul, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Finalement, $\varphi(L_n, L_n) = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \times (2n)! \times 2 \times (-1)^n \times \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Presque tout se simplifie, et il ne reste que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$, comme prévu.

(e) On sait que la distance d demandée vérifera $d^2 = \|X^{n+1}\|^2 - \|p(X^{n+1})\|^2$, où $p(X^{n+1})$ est le projeté orthogonal de X^{n+1} sur $\mathbb{R}_n[X]$. Plus simplement, en se plaçant dans $E = \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on sait que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de E, donc $\mathbb{R}_n[X]^{\perp} = \mathrm{Vect}(L_{n+1})$, et la distance recherchée peut être obtenue plus rapidement en calculant le projeté orthogonal de X^{n+1} sur $\mathrm{Vect}(L_{n+1})$ (d sera la norme de ce vecteur). Puisque $\sqrt{\dfrac{2n+3}{2}}L_{n+1}$ est un vecteur normé, ce projeté vaut $\dfrac{2n+3}{2}\varphi(X^{n+1}, L_{n+1})L_{n+1}$. Or, on peut certainement écrire $X^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k L_k$ (puisque $(L_0, \dots, L_{n+1})$ est une base de E), avec $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!}$, puisque X^{n+1} a pour coefficient dominant a_{n+1} fois celui de L_{n+1}. Comme la famille est orthogonale, on a donc $\varphi(X^{n+1}, L_{n+1}) = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} \times \varphi(L_{n+1}, L_{n+1}) = \dfrac{2^{n+2}(n+1)!^2}{(2n+3)!}$. Finalement, notre projeté est donc égal à $\dfrac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!}L_{n+1}$, donc $d = \dfrac{2^{n+\frac{3}{2}}((n+1)!)^2}{(2n+2)!\sqrt{2n+3}}$. Aux erreurs de calculs près...