Feuille d'exercices n^{o} 5 : Primitives, équations différentielles

MPSI Lycée Camille Jullian

11 octobre 2023

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\ dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (en appliquant les quelques recettes vues en cours sur les fractions rationnelles) :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\ dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3}\ dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\ dx$
5. $\displaystyle\int^x \arctan\left(\frac{t-1}{t-2}\right)\ dt$

Exercice 4 (***)

Calculer les intégrales suivantes (en mélangeant diverses techniques vues en cours) :

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$ (on commencera par effectuer le changement de variables $u = \cos(t)$, puis on fera une décomposition en éléments simples)
2. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$ (on commencera par une IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ (on commencera par effectuer le changement de variables $t = \pi - x$)
4. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t))\,dt$ (on pourra effectuer deux IPP)
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx$ (on effectuera le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, il pourra être utile d'exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t)

Exercice 5 (**)

On note F_n la primitive s'annulant en 0 de la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Que vaut F_1 ?
2. En effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$, calculer F_2.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre F_n et F_{n+1}.
4. Déduire des questions précédentes une expression de F_3.

Exercice 6 (***)

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-2\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}\,dx$.

1. Résoudre l'équation $2\cos(x) + 3\tan(x) = 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-2\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}$ puis l'existence de l'intégrale I.
2. Effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$ dans l'intégrale I. Il est fortement conseillé de multiplier numérateur et dénominateur par $\cos(x)$ avant de simplifier l'expression sous l'intégrale.
3. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1-2t}{2+3t-2t^2}$.
4. Terminer le calcul de l'intégrale I.
5. Quel devrait être le signe de I ? Vérifier (à la calculatrice si besoin) que la formule obtenue a le bon signe.

Exercice 7 (***)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\,dx$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (on pourra par exemple exploiter un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction f définie et strictement monotone sur $[0, a]$, vérifiant $f(0) = 0$, et on note g sa réciproque.
   (a) On veut prouver que, $\forall x \in [0, a]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(t)\,dt = xf(x)$. Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.

(b) Exprimer $\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} g(t)\, dt$ à l'aide de primitives F et G des fonctions f et g.

(c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.

3. On veut calculer dans cette question $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$.

(a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$.

(b) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{x^2}{x^4+1}$, sous la forme $\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{P(x)}$.

(c) Calculer l'intégrale J, et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en exploitant si besoin le résultat de la question 1).

4. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque g.

5. Calculer $\int_0^1 g(x)\, dx$ et appliquer la résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de I.

Exercice 8 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = \mathrm{sh}^3(x)$.

Exercice 9 (***)

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation différentielle $(E) : x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$.

1. Quel intervalle de résolution va-t-on choisir ?
2. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E) (aucun calcul technique n'est normalement nécessaire).
3. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer les limites de toutes les fonctions solutions aux bornes de l'intervalle de résolution.
6. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.
7. Étudier le plus complètement possible la solution obtenue à la question précédente, et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 11 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt$.

Exercice 12 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 13 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \frac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 14 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2)\sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \frac{y'}{y}$).

Exercice 15 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \frac{1}{4}$, puis $h = \frac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 16 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2 e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x+1)e^x$.
4. $y'' - y = \mathrm{sh}(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 17 (**)

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z. En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 18 (***)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E) : xy' - 2|y| = x$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Résoudre sur I l'équation $xy' - 2y = x$ (sans valeur absolue cette fois !), et vérifier qu'aucune de ses solutions n'est strictement positive sur tout l'intervalle I.

2. Résoudre de même sur I l'équation $xy' + 2y = x$ et vérifier qu'aucune de ses solutions n'est strictement négative sur tout l'intervalle I.
3. On note désormais y_0 une solution de l'équation (E) sur tout l'intervalle I.
   (a) Montrer que y_0 est strictement croissante sur I.
   (b) En exploitant les questions précédentes, montrer que y_0 ne peut pas garder un signe strictement constant sur I.
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel $x_0 > 0$ tel que $y_0(x_0) = 0$.
   (d) Montrer enfin que, $\forall x \in]0, x_0]$, $y_0(x) = \dfrac{x^3 - x_0^3}{3x^2}$, et que, $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $y_0(x) = \dfrac{x^2}{x_0} - x$.
4. On s'intéresse dans cette question à la solution y_0 vérifiant $x_0 = 1$. On pourra bien sûr reprendre les expressions de la question 3.*d*.
   (a) Que vaut dans ce cas $y_0'(1)$?
   (b) Déterminer les limites de y_0 aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y_0(x)}{x}$.
   (c) Calculer la dérivée seconde $y_0''(x)$ (en distinguant deux intervalles), et préciser son signe.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de y_0 tenant compte de tous les calculs effectués ci-dessus. On rappelle qu'une fonction dont la dérivée seconde est négative est **concave** (courbe tournée « vers le bas » comme celles des fonctions racine carrée ou ln).

Exercice 19 (**)

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes en effectuant le changement d'inconnue indiqué :

1. $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2} y(t)$
2. $xe^y y' - 2e^y + x^2 = 0$ sur l'intervalle $]0, 1[$ en posant $z(x) = e^{y(x)}$
3. $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $z(x) = xy(x)$
4. $t^2 y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$
5. $x^3 y'' = y - xy'$ sur $]0, +\infty[$ en posant $z(x) = y(x) - xy'(x)$

Exercice 20 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$ en posant $t = \dfrac{1}{x}$
2. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
3. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
4. $x^2 y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).
5. $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en posant $t = \sin(x)$.

Exercice 21 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 22 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).

Exercice 23 (***)

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x)+1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f.
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Exercice 24 (***)

On considère l'équation différentielle $(E) : (1+2x)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il (soyez le plus précis possible) ? On va résoudre (E) sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pourquoi ce choix d'intervalle ?
2. Déterminer une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $y_p : x \mapsto e^{kx}$ soit solution de (E).
3. On pose désormais $z(x) = e^{2x}y(x)$. Montrer que la dérivée z' de la nouvelle fonction inconnue est solution d'une équation linéaire du premier ordre (E').
4. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{4x+6}{2x+1}$ sur l'intervalle I.
5. Résoudre l'équation (E') sur l'intervalle I.
6. En déduire les solutions de (E) sur ce même intervalle.
7. On admet que les formules obtenues pour les solutions sur I resteraient valables sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ (avec des constantes éventuelles différentes). Existe-t-il des solutions de l'équation (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (pour cela, il faut recoller les solutions sur les deux intervalles de façon à ce que les limites en $-\frac{1}{2}$ de y, de y' et de y'' soient identiques) ?
8. Déterminer l'unique solution y de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 1$ et pour laquelle la tangente à la courbe intégrale en son point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses pour $x = 1$.
9. On pose $y(x) = \frac{1}{2}(1+4x^2) + \frac{1}{2}e^{-2x}$.
   (a) Calculer $y''(x)$, que peut-on en déduire pour la fonction y ?
   (b) Montrer que y' s'annule en une unique valeur α vérifiant $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.
   (c) Montrer que $y(\alpha) = 2\alpha^2 + 2\alpha + \frac{1}{2}$, en déduire un encadrement de $y(\alpha)$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de y. On précisera en particulier la valeur de $y\left(-\frac{1}{2}\right)$.
   (e) Tracer une allure la plus précise possible de la courbe représentative de la fonction y, en tenant compte de tous les calculs effectués.

Exercice 25 (***)

Déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(-x) + 2f(x) = x^2$ (on se ramènera à une équation d'ordre 4 à coefficients constants, qui se résoud exactement de la même façon qu'une équation du second ordre à coefficients constants, à l'aide d'une équation caractéristique du quatrième degré).

Problème 1 (***)

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f, en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f, ainsi que le tableau de variations de la fonction g.
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f, et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'annulation de f'' (on admettra qu'en ces points, la position relative de la tangente et de la courbe change au point d'intersection).
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
2. Déterminer deux constantes a et b telles que $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'unique solution définie sur $]0;1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0,1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Troisième partie : Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F).
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0;1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E).
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{k})^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0;1[$) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0;1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \dfrac{1}{2}$.

Problème 2 : sur les intégrales de Wallis et l'intégrale de Gauss.

I. Étude des intégrales de Wallis.

Les intégrales de Wallis sont définies par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les valeurs des intégrales I_0, I_1 et I_2.
2. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ (on pourra par exemple écrire que $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$). En déduire les valeurs de I_3 et de I_4.
3. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
4. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

On **admet** pour la suite de l'exercice que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

II. Calcul de l'intégrale de Gauss.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\, du$ (on ne cherchera **jamais** à calculer explicitement $f(x)$).

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée. Donner les variations de f. On **admet** que f admet une limite finie en $+\infty$ qu'on notera abusivement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.
3. En déduire l'encadrement, $\forall u \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-u^2} \leqslant \dfrac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}$.
4. À l'aide du changement de variables $u = \sqrt{n}\sin(t)$, montrer que si $n \geqslant 1$,
   $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du = \sqrt{n} I_{2n+1}$.
5. À l'aide du changement de variables $u = \sqrt{n}\tan(t)$, montrer que si $n \geqslant 1$,
   $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n} \cos^{2n-2}(t)\, dt$.
6. On donne le théorème suivant : si deux fonctions continues f et g sont telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$.
   Déduire de ce théorème et des questions précédentes l'encadrement
   $\sqrt{n} I_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\, du \leqslant \sqrt{n} I_{2n-2}$.
7. En déduire rigoureusement la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.

Problème 3 (**)

I. Résolution d'une équation différentielle.

On considère dans cette partie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)e^{-x}$.

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
2. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Vérifier par le calcul que F est solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
4. Résoudre complètement l'équation différentielle de la question précédente.
5. Déterminer l'unique solution de l'équation vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

Une première suite d'intégrales.

On définit dans cette partie, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)e^{-nt}\,dt$.

1. Calculer I_n à l'aide d'une double intégration par parties.
2. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Retrouver la valeur de I_n à l'aide d'un calcul direct d'intégrale complexe (on partira de la formule d'Euler $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, et on admettra que toute fonction complexe de la forme $t \mapsto e^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$ a pour dérivée ae^{at} et pour primitive $t \mapsto \dfrac{1}{a}e^{at}$).

Une deuxième suite d'intégrales.

On pose désormais $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)e^{-t}\,dt$ (où n est toujours un entier naturel).

1. Calculer les valeurs de J_0, J_1 et J_2.
2. Quel est le signe de J_n ? Et la monotonie de la suite (J_n) ? On donnera des justifications intuitives, en s'appuyant sur le fait que $f(t) \leqslant g(t) \Rightarrow \displaystyle\int f \leqslant \int g$ si l'inégalité est valable sur tout l'intervalle d'intégration.
3. Montrer que la suite (J_n) est convergente.
4. En utilisant (au moins) une IPP, déterminer une relation entre J_{n+2} et J_n.
5. En déduire les valeurs de J_3 et J_4.
6. On souhaite prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant J_n \leqslant \varepsilon$ (c'est la définition de la limite d'une suite que nous verrons bientôt en cours).
   (a) Montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\,dt$.
   (b) Montrer rigoureusement que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n(t)\,dt$ (un changement de variable fera l'affaire). Pourquoi était-ce intuitivement évident (un dessin suffira ici) ?
   (c) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt \leqslant x\sin^n(x) + \dfrac{\pi}{2} - x$.
   (d) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 < x\sin^n(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (e) Conclure.

Problème 4 : à propos des équations différentielles d'ordre 3 (***).

On considère dans tout ce problème une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants du type

$$(E) : y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

(où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d est une fonction continue sur $\mathbb{R}$). Par analogie avec l'ordre 2, on associera à (E) l'équation homogène $(H) : y''' + ay'' + by' + cy = 0$

ainsi que l'équation caractéristique $(E_c) : r^3 + ar^2 + br + c = 0$.

A. Généralités.

1. On suppose que la fonction f est une solution particulière de l'équation (E). Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de (H).
2. On suppose dans cette question que $d(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Montrer que, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique (E_c), il existe une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = Ae^{kx}$.
3. On suppose toujours $d(x) = e^{kx}$ mais cette fois, k est racine triple de l'équation caractéristique (E_c) (autrement dit, (E_c) peut se factoriser sous la forme $(r - k)^3 = 0$). Vérifier que $6k + 2a = 3k^2 + 2ak + b = k^3 + ak^2 + bk + c = 0$.
4. Montrer que, dans ce cas, l'équation (E) admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Ax^3e^{kx}$.
5. Montrer que le principe de superposition reste valable pour des équations linéaires à coefficients constants d'ordre 3.

B. Un cas particulier.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation homogène $(H_1) : y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-2x}\cos(x)$ est solution de (H_1).
2. Résoudre l'équation caractéristique associée à (H_1).
3. Montrer que, si r est racine de l'équation caractéristique précédente, $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H_1).
4. En déduire que toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}\cos(x) + Ce^{-2x}\sin(x)$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, sont solutions de (H_1).
5. On veut prouver la réciproque du résultat précédent. On considère une fonction y solution de H_1 et on pose $z = y'' + 4y' + 5y$.
   (a) Montrer que z est solution de l'équation $z' + z = 0$.
   (b) Résoudre l'équation obtenue à la question précédente.
   (c) Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire la réciproque souhaitée (question à rédiger rigoureusement).
6. Déterminer l'unique solution y_0 de l'équation (H_1) vérifiant les conditions initiales $y_0(0) = 2$, $y_0'(0) = -2$ et $y_0''(0) = -2$.
7. Résoudre l'équation $y_0(x) = 0$.
8. Donner une allure de la courbe représentative de la fonction y_0 (sans chercher à la justifier).
9. Pour finir en beauté, résoudre entièrement l'équation différentielle $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 34\,\mathrm{ch}(2x)$.