

# Feuille d'exercices n° 19 : Applications linéaires

MPSI Lycée Camille Jullian

2 avril 2024

## Exercice 1 (\*)

On note  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , déterminer pour chacune des applications  $\varphi : E \rightarrow E$  définies par  $\varphi(f) = g$  si elles sont linéaires ou non :

- $g(x) = \int_0^x f(t) dt$
- $g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t^2) dt$
- $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$
- $g(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$
- $g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt$
- $g(x) = f''(x)$
- $g(x) = f''(x^2)$
- $g(x) = f''(x)^2$
- $g(x) = f''(0)x^2$
- $g(x) = f''(x) + x \int_0^x f'(t) dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t) dt f'(t)$

## Exercice 2 (\*)

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que les images des vecteurs de la base canonique soient  $(1, -1, 2)$ ,  $(-3, 2, -1)$  et  $(-7, 4, 1)$ .

1. Déterminer une expression explicite de  $u$ .
2. Déterminer les antécédents par  $u$  de  $(-1, 1, 8)$  et de  $(-2, 1, 3)$ .
3.  $u$  est-elle injective? Surjective?

## Exercice 3 (\*\*)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. On suppose que  $u^2 = 0$ . Montrer que  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ , et que  $\text{id}_E + u$  est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que  $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$ ; et que  $\ker(u) + \text{Im}(u) = E \Leftrightarrow \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$ .

## Exercice 4 (\*\*)

On considère  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et on définit l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(z) = z + a\bar{z}$ , où  $a$  est un nombre complexe fixé. Montrer que  $f$  est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $f$  soit bijective.

## Exercice 5 (\*\*)

On se place dans  $\mathbb{R}^3$  et on note  $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$  et  $G = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$ . Montrer que  $F \oplus G = \mathbb{R}^3$  et déterminer l'expression analytique de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et de la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ .

## Exercice 6 (\*\*\*)

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un même espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $\ker(f) = \ker(f^2)$  si et seulement si  $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ .
2. Montrer que  $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$  si et seulement si  $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$ .
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir  $\ker(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  supplémentaires dans  $E$ .
4. Montrer que  $f \circ g$  est un automorphisme si et seulement si  $f$  est surjective,  $g$  injective et  $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g) = E$ .

## Exercice 7 (\*)

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = \left( \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right)$ . Montrer que  $f$  est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

## Exercice 8 (\*\*)

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues, et  $F$  le sev de  $E$  constitué des fonctions (continues) s'annulant en 0. Montrer que la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle est supplémentaire de  $F$  dans  $E$ , et déterminer l'expression de la projection sur  $F$  parallèlement à cette droite.

## Exercice 9 (\*\*\*)

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\varphi : E \rightarrow E$  l'application définie par  $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que, si  $f \in \ker(\varphi)$ , alors  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ , et  $f$  est périodique de période 1.
3. La réciproque de la propriété montrée à la question précédente est-elle vraie?
4. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il injectif? Surjectif?
5. On restreint l'application  $\varphi$  au sous-espace vectoriel  $F = \mathbb{R}_2[X]$  de  $E$ . Montrer que cette restriction est un endomorphisme de  $F$ .
6. Calculer  $\varphi(1)$ ,  $\varphi(X)$  et  $\varphi(X^2)$ .
7. Montrer que  $\varphi|_F$  est un automorphisme.

## Exercice 10 (\*\*\*)

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs dans un même espace vectoriel  $E$ , vérifiant  $p \circ q = q \circ p$ .

1. Montrer que  $p \circ q$  est aussi un projecteur.
2. Montrer que  $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ .
3. Montrer que  $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$ .
4. On suppose de plus que  $p \circ q = 0$  (et donc  $q \circ p = 0$  également). Montrer alors que  $p + q$  est aussi un projecteur, de mêmes noyau et image que  $p \circ q$ .

## Exercice 11 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $N_k = \ker(f^k)$  et  $I_k = \text{Im}(f^k)$ .

1. Montrer que la suite  $(N_k)$  est croissante et la suite  $(I_k)$  décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier  $p$  pour lequel  $N_p = N_{p+1}$ , puis que la suite  $(N_k)$  stationne à partir du rang  $p$ .
3. Montrer que la suite  $(I_k)$  stationne à partir du même rang  $p$ .
4. Montrer que  $E = N_p \oplus I_p$ .

## Exercice 12 (\*\*\*)

On se place dans  $\mathbb{C}_3[X]$ , et on note  $A = X^4 - 1$  et  $B = X^4 - X$ . On désigne par  $f$  l'application qui, à un polynôme  $P$ , associe le reste de la division de  $AP$  par  $B$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_3[X]$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$ .
3. Quelle est la dimension de  $\text{Im}(f)$ ? Montrer que  $\text{Im}(f) = (X - 1)\mathbb{C}_2[X]$ .
4. Déterminer les quatre racines  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  de  $B$ .
5. Montrer qu'en posant  $P_k = \frac{B}{X - z_k}$ , la famille  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est une base de  $\mathbb{C}_3[X]$ .
6. Montrer que  $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$ .

## Exercice 13 (\*\*)

Soient  $f, g$  et  $h$  trois endomorphismes d'un même espace vectoriel  $E$  vérifiant  $f \circ g = h, g \circ h = f$  et  $h \circ f = g$ .

1. Montrer que  $f, g$  et  $h$  ont le même noyau et la même image.
2. Montrer que  $f^5 = f$ .
3. Montrer que  $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

## Exercice 14 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{E}$  un endomorphisme nilpotent, où  $E$  est de dimension finie  $n$ .

1. Montrer que  $\ker(f) \neq \{0\}$ , et que  $\text{rg}(f) \leq n - 1$ .
2. Soit  $p$  le plus petit entier pour lequel  $f^p = 0$ . Prouver qu'il existe un  $x \in E$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$ , et montrer que  $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est une famille libre.
3. En déduire que  $p \leq n$  et que  $f^n = 0$ .
4. On suppose que  $p = n$ . Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec  $f$ .

## Exercice 15 (\*\*)

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $\varphi$  l'application définie par :  $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X - 1)P'$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que  $\ker(\varphi)$  est une droite vectorielle dont on précisera une base. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il injectif?
3. Montrer que  $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(1, X)$ .
4. Montrer que  $\ker(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = E$ .
5. Soit  $p$  la projection vectorielle sur  $\ker(\varphi)$  de direction  $\text{Im}(\varphi)$ . Que valent  $\varphi \circ p$  et  $p \circ \varphi$ ?

## Exercice 16 (\*)

On considère  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel réel, et on note  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{C}$  par  $\varphi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}$ .
2. Montrer que  $\varphi$  est un projecteur.
3. Déterminer l'image et le noyau de  $\varphi$ , ainsi que leurs dimensions.

## Exercice 17 (\*\*)

On pose  $E = R[X]$  et, pour tout  $P \in E$ ,  $f(P) = P - XP'$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $y - xy' = 1$ . Possède-t-elle des solutions sur  $\mathbb{R}$ ?
2. Prouver que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. Déterminer son noyau. L'application  $f$  est-elle injective?
4. L'application  $f$  est-elle surjective?
5. L'application  $f \circ f$  est-elle injective? Surjective? Déterminer  $\ker(f \circ f)$ .

## Exercice 18 (\*\*)

On considère l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2y - 2z, x + y - 2z, x - y) \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).
2. Déterminer l'image et le noyau de  $f$ . L'application  $f$  est-elle injective? Surjective? Bijective?
3. Montrer que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires.
4. Soit  $p$  la projection sur  $\text{Im}(f)$  parallèlement à  $\ker(f)$ , donner l'expression de  $p(x, y, z)$ .
5. Calculer  $f^2(x, y, z)$  et  $f^3(x, y, z)$ , et vérifier que  $f^3 - f^2 - 2f = 0$ .
6. On pose  $r = \frac{1}{6}(f^2 + f)$  et  $s = \frac{1}{3}(f^2 - 2f)$ , montrer que  $r$  et  $s$  sont des projecteurs, et que  $f \circ r = 2r$  et  $f \circ s = -s$ .
7. Montrer que,  $\forall n \geq 1$ ,  $f^n = 2^n r + (-1)^n s$ . En déduire l'expression de  $f^n(x, y, z)$ .

## Exercice 19 (\*\*)

Un endomorphisme  $f$  est nilpotent s'il existe un entier naturel  $n \geq 1$  tel que  $f^n = 0$  ( $f^n$  étant la composée de  $f$   $n$  fois par elle-même, comme d'habitude).

1. On pose dans cette question  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (z - x, 3x + y - 2z, x + y) \end{cases}$ . On admet que cette application est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Déterminer le noyau de  $f$  (on précisera sa dimension).
  - (b) Déterminer l'image de  $f$  (on donnera aussi sa dimension).
  - (c) Calculer l'expression explicite de  $f^2(x, y, z)$ .
  - (d) Déterminer le noyau de  $f^2$ , puis vérifier que  $\ker(f^2) = \text{Im}(f)$ .
  - (e) En déduire que  $f^3 = 0$ , et donc que  $f$  est nilpotent.
2. On pose dans cette question  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (0, x, y, z) \end{cases}$ .
  - (a) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme nilpotent de  $\mathbb{R}^4$  (sans faire des millions de calcul).
  - (b) Définir un endomorphisme nilpotent de  $\mathbb{R}^n$  en prenant  $f$  pour exemple.
3. On pose dans cette question  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{cases}$ .

- (a) Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- (b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . Sont-ils supplémentaires ?
- (c) Montrer que  $f$  est nilpotent.
- (d) L'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n([X])$  défini de la même façon que  $f$  est-il toujours nilpotent ? Expliquer rapidement pourquoi.

## Exercice 20 (\*\*)

On s'intéresse au problème suivant : si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, quels sont les endomorphismes  $f \in \mathcal{L}(E)$  pour lesquels  $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$  (on appellera dans la suite de l'exercice « condition S » le fait que  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ ) ? Le but de l'exercice est essentiellement d'étudier des cas particuliers de ce problème.

1. Si  $p$  est une projection de l'espace vectoriel  $E$ , que représentent  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  ? En déduire si  $p$  vérifie ou non la condition S. Une symétrie d'un espace vectoriel  $E$  vérifie-t-elle toujours la condition S ?
2. On note  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  l'application définie par  $f(P) = P'$ . Cet endomorphisme vérifie-t-il la condition S ?
3. On note désormais  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application définie par  $f(M) = \frac{M + M^\top}{2}$ . Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et déterminer s'il vérifie la condition S.
4. On note cette fois-ci  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $f : E \rightarrow E$  l'application définie par  $f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$ .
  - (a) Expliquer pourquoi  $f$  est bien un endomorphisme de  $E$  (sans faire de gros calculs).
  - (b) Déterminer explicitement l'image par  $f$  du polynôme  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ .
  - (c) Déterminer le noyau de l'application  $f$ .
  - (d) Préciser la dimension de l'image de  $f$ , puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.
  - (e) On note  $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  dont on précisera la dimension et une base, puis montrer que  $G = \text{Im}(f)$ .
  - (f) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires.
  - (g) Montrer que  $f$  est en fait un projecteur.
5. On note enfin  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie par  $f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y)$ .
  - (a) Déterminer le noyau et l'image de  $f$  (on donnera la dimension et une base à chaque fois).
  - (b) Vérifier que  $f$  satisfait à la condition S.
  - (c) Montrer toutefois que  $f$  n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

## Exercice 21 (\*\*)

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , où on note  $I$  la matrice identité et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On note  $f$  l'application qui, à une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , associe la matrice  $f(M) = \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J$ .

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de l'espace  $E$ .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$ .
3. Démontrer que  $\text{Im}(f) = \ker(f - id)$ .
4. Montrer que  $f$  est un projecteur.
5. Déterminer l'expression de la symétrie  $s$  par rapport à  $\text{Im}(f)$  et parallèlement à  $\ker(f)$ .

## Exercice 22 (\*\*\*)

On note  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + 3y - 2z, -2x + 6y - 4z)$ .

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$  (on en donnera une base).
3. En déduire la dimension de  $\text{Im}(f)$ , et en donner une base.
4. Montrer que  $\ker(f) \subset \text{Im}(f)$ . Cette inclusion est-elle une égalité?
5. On note  $u = (0, 1, 0)$ ,  $v = f(u)$  et  $w = f(v)$ . Calculer  $v$  et  $w$ , et vérifier que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
6. Donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base  $\mathcal{B}$ .
7. Montrer que  $f^3 = 0$  (on pourra utiliser au choix la base  $\mathcal{B}$ , ou faire des calculs barbares).
8. On pose  $g = f + 3id$ . Exprimer  $g^2$ ,  $g^3$  puis plus généralement  $g^k$  en fonction de  $f^2$ ,  $f$  et de  $id$ .
9. Montrer que  $g$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer  $g^{-1}$  (quasiment aucun calcul nécessaire). La formule de la question précédente reste-t-elle valable pour des entiers  $k$  négatifs?

## Problème (\*\*\*)

Dans tout cet exercice, on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme  $f$  sur un espace vectoriel réel  $E$ , vérifiant  $f \circ f = \frac{1}{2}(f + id_E)$ . On notera  $f \circ f = f^2$  dans tout l'exercice.

### I. Une somme directe intéressante.

On note  $p$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}id_E$ .

1. Montrer que  $p$  est un projecteur.
2. Vérifier que  $\text{Im}(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ .
3. On note  $q$  le projecteur sur  $\ker(p)$  parallèlement à  $\text{Im}(p)$ , exprimer  $q$  comme combinaison linéaire de  $f$  et de  $p$ .
4. En déduire que  $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}id_E\right)$ .

### II. Expression des puissances de $f$ .

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$ .
2. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
3. La relation obtenue pour  $f^n$  reste-t-elle valable si  $n = -1$ ? Plus généralement si  $n \in \mathbb{Z}$ ?

### III. Un exemple concret.

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $f(x, y, z) = \left(-2x + y + z, -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z, -3x + y + 2z\right)$ .

1. Prouver que  $f^2 = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$ .
2. Déterminer  $\ker(f - id)$  et  $\ker\left(f + \frac{1}{2}id\right)$ , et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs  $p$  et  $q$  tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de  $f^n$ .