Chapitre 16 : Analyse asymptotique

MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2024

La mathématique est une science dangereuse :
elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau
de l'homme car il n'a que ça à faire.

Perles du bac.

Ce chapitre a pour but de mettre en place des notations essentielles pour alléger les calculs de limites, et surtout d'introduire la notion absolument fondamentale de développement limité (dont vous verrez une sorte d'extension l'an prochain quand vous étudierez les séries entières). Nous avons déjà très rapidement évoqué le principe de ces derniers : « transformer » une fonction presque quelconque (quelques hypothèses de régularité seront tout de même nécessaires) en fonction polynômiale à l'aide de la formule de Taylor (techniquement, il ne s'agit bien sûr que d'une approximation locale de la fonction par un polynôme). Il est donc absolument indispensable, non seulement de connaître les quelques formules de développements limités qui apparaitront dans ce cours, mais aussi de bien comprendre le fonctionnement de ces outils essentiels pour maîtriser leur application aux divers calculs de développements asymptotiques de suites et autres positions relatives de courbes et de tangentes que nous verrons dans ce chapitre.

Objectifs du chapitre :

- savoir manipuler rigoureusement les écritures à base de o et de $\sim$, en évitant absolument les horreurs du type « somme d'équivalents ».
- connaître parfaitement tous les développements limités usuels, et savoir faire des calculs précis avec.
- comprendre l'utilisation de DL pour l'étude locale de fonctions, et savoir rédiger correctement ces études.

1 Négligeabilité, équivalence.

1.1 Relation de négligeabilité.

Le but des deux outils présentés dans ce paragraphe est de pouvoir affiner un peu la notion de limite en $+\infty$ (dans le cas des suites, pour les fonctions auxquelles on étendra le principe ensuite, la limite peut bien sûr se situer ailleurs qu'en $+\infty$) pour comparer l'ordre de grandeur de deux suites ayant la même limite. Quand cette limite est finie non nulle, la simple valeur de cette limite est suffisante pour avoir un bon ordre de grandeur de la suite. Mais deux suites qui tendent toutes les deux vers 0, ou toutes les deux vers $+\infty$, quand la variable n tend vers $+\infty$, n'ont pas forcément le même ordre de grandeur. Par exemple, la suite définie par $u_n = n^n$ tend vers $+\infty$ beaucoup plus rapidement que la suite définie par $v_n = \ln(n)$. Les croissances comparées servent déjà à effectuer ce genre de comparaison d'ordres de grandeur, mais les outils et surtout les notations introduites ici vont améliorer grandement la facilité de rédaction de ce genre de calcul.

Définition 1. Une suite (u_n) est **négligeable** par rapport à une suite (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.

Remarque 1. Intuitivement, une suite est négligeable par rapport à une autre si elle est (au moins) un ordre de grandeur plus petite que cette dernière quand n tend vers $+\infty$. Cette définition s'adapte sans problème au cas où les deux suites ont des limites infinies ou nulles. Le seul petit détail pouvant poser problème est l'annulation éventuel de la valeur de v_n, mais si la suite (v_n) est nulle « trop souvent » quand n tend vers $+\infty$, aucune suite ne peut être négligeable par rapport à elle sans s'annuler également pour ces valeurs de n. Une définition alternative évitant tout de même cet écueil : $u_n = o(v_n)$ si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

La relation de négligeabilité n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble de toutes les suites (elle est transitive, mais pas réflexive ni antisymétrique). La notation assez inhabituelle employée peut entraîner des confusions quand on ne saisit pas bien le concept sous-jacent, il est important de se familiariser avec le plus vite possible. Par exemple dire que $u_n = o(n^2)$ et $v_n = o(n^2)$ ne signifie absolument pas que $u_n = v_n$ mais simplement que les deux suites u_n et v_n appartiennent toutes les deux à une gigantesque classe de suites qui sont celles qui tendent vers $+\infty$ (ou même vers autre chose !) « moins vite que n^2 ». Cette ambiguïté induit une grande souplesse dans les calculs faisant intervenir des o. Ainsi, si on sait que $u_n = n^2 + 2 + o(n)$, on pourra écrire plus simplement $u_n = n^2 + o(n)$ car le terme constant 2 étant lui-même négligeable devant n, il ne « sert à rien » et peut être intégré dans le $o(n)$ (qui n'est donc plus vraiment « égal » au $o(n)$ précédent, même si on le note exactement de la même façon). De façon générale, l'un des principes quand on écrit des o (ou des équivalents) dans les calculs est de garder le moins de termes superflus possible.

Proposition 1. Une suite (u_n) vérifie $u_n = o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. C'est évident, il suffit d'écrire la définition de $u_n = o(1)$. □

Proposition 2. Règles de calcul sur la relation de négligeabilité.

La négligeabilité s'écrivant sous forme d'égalité, on peut effectuer du calcul agébrique avec les o de façon assez naturelle. En particulier,

- On peut additionner des o en conservant dans la somme le o « le plus fort ». Par exemple, si $u_n = n^2 - 2n + o(n)$ et $v_n = 2n + o(\sqrt{n})$, on peut écrire que $u_n + v_n = n^2 + o(n)$ (comme $o(\sqrt{n})$ est a fortiori négligeable devant n, on le fait disparaître dans le $o(n)$).
- On peut multiplier ou diviser des o par n'importe quelle suite. Par exemple, si $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on peut écrire que $n^2 u_n = n - 1 + o(1)$ (multiplier par n^2 à l'intérieur ou à l'extérieur du o est rigoureusement équivalent).
- Si $u_n = o(v_n)$ et que (u_n) ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. Toutes ces régles sont très faciles à démontrer à l'aide de simples calculs de limites. Ainsi pour la dernière, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, et on veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = 0$, ce qui est à la portée du premier bambin de petite section de maternelle venu. □

1.2 Équivalence de suites.

Définition 2. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

Remarque 2. Là encore, le concept intuitif est évident, les deux suites ont le même ordre de grandeur. Ce concept est particulièrement pertinent encore une fois quand les limites des deux suites sont soit nulles, soit infinies (sinon, dire que $u_n \sim v_n$ revient tout simplement à dire que les limites des deux suites sont égales). Attention tout de même à un détail très important : quand on manipule la notation o, on ne met « dans le o » que des suites élémentaires sans coefficient multiplicatif (par exemple, écrire $u_n = o(3n)$ n'a aucun intérêt puisque ça signifie exactement la même chose que l'écriture plus simple $u_n = o(n)$). Ce ne sera pas du tout le cas pour les équivalents : $u_n \sim 3n$ ne peut sûrement pas être simplifié en $u_n \sim n$.

Notons enfin que la relation d'équivalence est une relation d'équivalence (encore heureux !). Elle est en effet réfléxive, symétrique et transitive (tout est évident).

Proposition 3. Quelques interprétations classiques des équivalents à avoir en tête :

- Deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$ (ce qui permet en pratique de passer très rapidement d'une écriture avec des équivalents à une écriture avec des o dans les calculs).
- Dire que $u_n \sim k$, avec $k \in \mathbb{R}^*$, signifie simplement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k$.
- Dire que $u_n \sim 0$ n'a par contre aucun sens (en particulier, ça ne signifie pas du tout que la suite a une limite nulle), si vous écrivez une telle chose sur une copie, vous êtes systématiquement en train de dire une très grosse bêtise.
- Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie) et $u_n \sim v_n$, alors (v_n) a la même limite que (u_n) (mais dans le cas d'une limite nulle ou infinie, l'équivalence donne une information beaucoup plus précise).

Démonstration. Encore une fois, tout est très facile à démontrer en partant de la limite. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0$, donc $u_n - v_n = o(v_n)$ et $u_n = v_n + o(v_n)$. Le reste est encore plus facile et ne mérite même pas d'être rédigé. □

Proposition 4. Règles de calcul sur les équivalents.

- On peut multiplier ou diviser des équivalents entre eux, ou par une autre suite : si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$. Plus simplement, si $u_n \sim v_n$, alors $u_n z_n \sim v_n z_n$. Même chose pour les quotients.
- On peut élever un équivalent à toute puissance réelle fixe : si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$. Par exemple, on aura $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$ ou $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$, mais pas nécessairement $u_n^n \sim v_n^n$ (ici la puissance est variable).

Démonstration. Encore une fois, tout cela est complètement évident. □

Remarque 3. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible.

Plus subtil, les équivalents ne peuvent pas non plus se composer en général. Ainsi, on peut écrire $n^2 + n \sim n^2$ mais e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2} (le quotient de ces deux suites est égal à e^n, qui tend vers $+\infty$). Si on tient vraiment à manipuler des sommes, il faudra systématiquement retraduire les équivalences à l'aide de o.

Exemples : Dans leur utilisation la plus basique, les équivalents servent à « se débarasser des termes inutiles », en ne gardant dans une somme que le terme dont l'ordre de grandeur est le plus grand (on les combinera souvent pour cela aux résultats de croissance comparée que nous rappellerons dans le paragraphe suivant. Ainsi, si $u_n = \frac{2n^2 + n - 1}{3n + n\sqrt{n}}$, comme on peut quotienter des équivalents, on écrira simplement $u_n \sim \frac{2n^2}{n\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$, ce qui prouve bien sûr que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, mais qui donne également une information plus précise.

Parfois, il sera toutefois nécessaire de faire un calcul plus subtil, voire de revenir à l'utilisation de o pour achever la recherche d'équivalent. Posons par exemple $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$. Si on souhaite utiliser directement des équivalents, la présence d'une différence nous force à écrire les choses à l'aide de o : $\sqrt{n^2 + n + 1} \sim \sqrt{n^2} \sim n$, donc $\sqrt{n^2 + n + 1} = n + o(n)$. De même, $\sqrt{n^2 - n + 1} = n + o(n)$, et la différence donne alors $u_n = o(n)$ (attention, on ne peut absolument pas « simplifier » les deux $o(n)$). Cette conclusion ne sert malheureusement pas à grand chose puisqu'elle ne permet même pas d'obtenir la limite de la suite (u_n) (et encore moins un équivalent). Pour cela, il faut en fait commencer par utiliser une technique classique dans ce genre de cas : le produit par la quantité conjuguée. On écrit donc $u_n = \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{n + o(n) + n + o(n)} = \frac{2n}{2n + o(n)} \sim 1$, ce qui prouve cette fois que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Définition 3. La suite (u_n) est **dominée** par la suite (v_n) s'il existe un réel strictement positif M tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$. On le note $u_n = O(v_n)$.

Remarque 4. Cette notion vous sera d'une inutilité la plus totale, mais si vous y tenez vraiment, vous pouvez par exemple dire que $u_n = O(1)$ au lieu de dire que la suite (u_n) est bornée (c'est rigoureusement équivalent).

1.3 Résultats classiques.

Proposition 5. Croissances comparées.

- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$

Démonstration. Ce sont bien les résultats que nous avions déjà énoncés en début d'année, exprimés à l'aide de nos nouvelles notations. □

Proposition 6. Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $u_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0$, avec $a_k \neq 0$, on peut écrire $u_n = a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \cdots + \frac{a_0}{a_k n^k}\right)$, avec une parenthèse qui tend clairement vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $u_n \sim a_k n^k$. C'est ce principe qu'on résume souvent sous la forme « on garde le terme de plus haut degré ». □

Proposition 7. Équivalents classiques.

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors :

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$

Démonstration. Les quatre premiers résultats découlent tous d'une même propriété plus générale : si f est une fonction dérivable en 0, et que (u_n) tend vers 0, alors $f(u_n) - f(0) \sim f'(0) u_n$. Cette propriété est une simple réécriture de la définition de la dérivée comme quotient du taux d'accroissement : $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand u_n tend vers 0. On applique ici cette propriété aux fonctions $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui a pour dérivée en 0, $\frac{1}{1+0} = 1$, puis à $f_2 : x \mapsto e^x$, qui a pour dérivée en 0 $e^0 = 1$; à $f_3 : x \mapsto \sin(x)$, qui a pour dérivée en 0 $\cos(0) = 1$, et enfin à $f_4 : x \mapsto \tan(x)$, qui a pour dérivée $1 + \tan^2(0) = 1$. La dernière propriété est un peu plus complexe (on ne voit pas bien d'où sort ce carré), nous l'admettrons provisoirement en attendant les développements limités. □

Remarque 5. Le fait que la suite tende vers 0 est absolument essentiel. Par exemple, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, mais $\ln(n+1)$ n'est sûrement pas équivalent à n quand n tend vers $+\infty$ (c'est en l'occurence équivalent à $\ln(n)$).

Exemple : Un cas intéressant de calcul utilisant toutes les notions vues jusqu'ici est la recherche d'équivalents de suites implicites. Reprenons une suite déjà étudiée il y a quelques mois, la suite (u_n) dont le terme général est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Nous avions déjà prouvé à l'époque que la suite (u_n) était décroissante et convergeait vers 0. Essayons désormais d'obtenir une information plus précise en cherchant dans un premier temps un équivalent simple de u_n.

Pour cela, on écrit simplement $\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$ en reprenant l'équation définissant la suite. Cela signifie très exactement que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Peut-on obtenir mieux ? Oui, si on arrive à obtenir un équivalent de la différence $u_n - \dfrac{1}{n}$, ce qui permettra de mesurer l'écart entre u_n et son équivalent. Rien de plus facile, on réintègre dans notre calcul précédent la nouvelle information obtenue : $u_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{e^{u_n} - 1}{n} \sim \dfrac{u_n}{n}$ (équivalent classique, on a bien une limite nulle pour u_n). Mais comme $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, on en déduit que $u_n - \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$. On peut écrire le résultat obtenu autrement : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ce qui constitue ce qu'on appelle un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n^2}$ de la suite (u_n).

Peut-on aller encore plus loin ? On peut toujours essayer, en appliquant la même méthode : $u_n - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n(e^{u_n} - 1) - 1}{n^2}$. Au numérateur, on ne peut pas faire mieux qu'écrire $n \times (u_n + o(u_n)) - n - 1 = n \times \left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - 1 = 1 + o(1) - 1 = o(1)$. Cette information est insuffisante pour savoir si le quotient de ce numérateur par n^2 a un équivalent simple. En fait, pour continuer les calculs, on aurait besoin de développements limités, nous reprendrons cet exemple un peu plus loin.

1.4 Extension aux fonctions.

Attention, dans cette partie, nous allons atteindre des sommets inégalités de paresse de la part de votre professeur de maths préféré : les définitions et propriétés sont exactement les mêmes que pour les suites. La seule chose à laquelle il faudra faire beaucoup plus attention quand on utilise ces notions sur les fonctions, c'est qu'il faut préciser vers quoi tend la variable x (ce ne sera pas toujours $+\infty$). Par exemple, on peut écrire que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (équivalence classique vu un peu plus haut), mais $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x$ (ce n'est d'ailleurs équivalent à rien de simple).

2 Développements limités.

2.1 Théorie.

Le principe des développements limités est très simple : calculer le polynôme de degré n fixé approchant le mieux possible la courbe d'une fonction au voisinage d'un certain point de la courbe. On connait en fait déjà la formule permettant de calculer ces polynômes, puisqu'il s'agit de la formule de Taylor énoncée une première fois dans notre chapitre consacré aux polynômes. Nous la retrouvons ici sous une forme à peine modifiée, puisque la seule différence ici sera qu'elle ne donne évidemment plus une égalité, mais on ne cherchera pas à exprimer précisément l'écart entre les valeurs prises par la fonction et le polynôme censé l'approcher (pour cela on attendra les troisième et quatrième versions de cette formule que nous croiseront dans un chapitre d'analyse ultérieur).

Théorème 1. Formule de Taylor-Young.

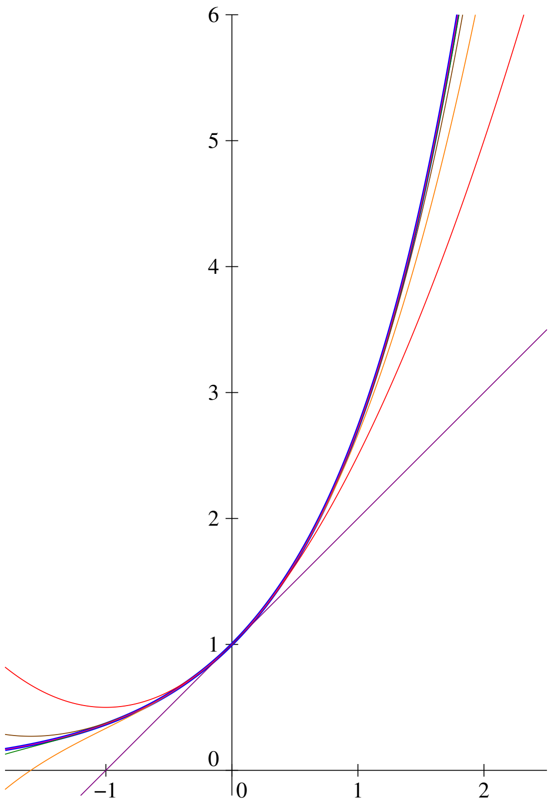
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors
$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$.

La partie polynômiale du membre de droite de cette égalité sera appelée **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a.**

Démonstration. La formule se prouve par récurrence sur l'entier n. Elle est évidente pour $n = 0$ (c'est la définition même de la continuité). Pour prouver l'hérédité, on a besoin du petit résultat suivant : si g est une fonction dérivable telle que $g'(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1})$. En effet, le théorème des accroissements finis permet d'écrire, si $x \neq a$, l'égalité $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$, avec $c_x \in]a, x[$ (ou $c_x \in]x, a[$ si $x < a$) et donc $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$. On peut alors majorer : $\left|\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| = \left|\dfrac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right| \times \left|\dfrac{c_x-a}{x-a}\right|^n$. Par construction de c_x, la deuxième valeurs absolue est toujours inférieure ou égale à 1, et la première tend vers 0 quand x tend vers a à cause de l'hypothèse faite sur la fonction g', ce qui prouve notre lemme.

On peut maintenant prouver le résultat souhaité : supposons donc f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, et posons $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. La fonction g est évidemment dérivale sur I, et $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ à laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Autrement dit, $g(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$, et il n'y a plus qu'à appliquer le lemme démontré ci-dessus pour obtenir la formule au rang $n+1$ (par construction $g(a) = 0$). □

Ci-dessous, une illustration du principe de la formule de Taylor : on a tracé l'allure locale de la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de 0, et celle de ses polynômes de Taylor pour certains ordres : courbe de f en bleu, polynôme d'ordre 1 en violet (ce n'est rien d'autre que la tangente en 0 à la courbe), d'ordre 2 et rouge, d'ordre 3 en orange, d'ordre 4 en marron, d'ordre 5 en vert et d'ordre 10 en rose :



Définition 4. Une fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a si $f(x) \underset{x \to a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, où $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P est alors appelé **partie régulière** du développement limité, et ce qui se cache derrière le $o(x-a)^n$ est le **reste** du développement limité.

Remarque 6. On notera souvent $DL_n(a)$ pour désigner un développement limité à l'ordre n en a. On omettra souvent de préciser que x tend vers 0 quand on écrit un développement limité en 0, ce qui sera de loin le cas le plus fréquent.

Proposition 8. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors sa partie régulière est unique.

Démonstration. En effet, si f admettait deux développements limités avec des parties régulières P_1 et P_2 distinctes, on aurait par soustraction des deux développements $0 = P_1(x-a) - P_2(x-a) + o(x-a)^n$, autrement dit $P_1(x-a) - P_2(x-a) = o(x-a)^n$. Le polynôme $P_1 - P_2$ étant de degré au plus n, ceci n'est possible que s'il est nul. □

Corollaire 1. Si f est une fonction paire et admet un développement limité à l'ordre n en 0, celui-ci ne contient que des puissances paires de x. De même, si f est impaire, ses développements limités en 0 (s'ils existent) ne contiendront que des puissances impaires de x.

Démonstration. Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ le DL_n en 0 de f (on suppose ici f paire). Comme $-x$ tend certainement vers 0 quand x tend vers 0, on peut écrire $f(-x) = a_0 - a_1x + \cdots + (-1)^nx^n + o(x^n)$. En soustrayant les deux égalités et en utilisant le fait que $f(x) - f(-x) = 0$ pour une fonction paire, on trouve $0 = 2a_1x + \cdots + 2a_{2k+1}x^{2k+1} + o(x^n)$. Or, la fonction nulle a évidemment pour développement limité en 0 le développement suivant : $0 = 0 + o(x^n)$. Par unicité de la partie régulière du DL, on en déduit que $a_1 = \cdots = a_{2k+1} = 0$. Le raisonnement pour une fonction impaire est le même en faisant une somme au lieu de la différence. □

Proposition 9. Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a.

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a, alors f admet un développement limité à l'ordre n en a, dont la partie régulière est le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a.

Démonstration. Tout a déjà été fait ! Dire que f est continue en a signifie bien que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$, dire que f est dérivable en a est équivalent à avoir $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, et le troisième point est une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young. Attention tout de même, dans ce dernier cas, la réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des développements limités à tout ordre en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. □

2.2 Formulaire, première partie.

Théorème 2. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ (α désignant ici un réel quelconque).

Démonstration. Toutes ces formules sont obtenues assez facilement à partir de la formule de Taylor-Young (il faut simplement réussir à exprimer la dérivée n-ème de f pour tout entier n, ou du moins la valeur de cette dérivée en 0), mais on peut éviter certains calculs.

- la formule pour l'exponentielle est vraiment triviale : en posant $f(x) = e^x$, on a toujours $f^{(n)}(x) = e^x$ donc $f^{(n)}(0) = 1$, il ne reste plus qu'à recopier la formule de Taylor.
- les formules pour ch et sh s'obtiennent alors simplement à partir de la précédente. Comme $-x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut écrire que $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)$, donc $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n) + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)$. Notons que seules les puissances paires subsistent, ce qui est évidemment normal pour une fonction paire. C'est exactement le même principe pour la fonction sh.
- on peut en fait procéder de même pour les fonctions trigonométriques cos et sin en exploitant les formules d'Euler. En admettant qu'on a le droit d'appliquer nos développements limités avec une variable complexe, $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{i}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)$, et $e^{-ix} = 1 - ix - \frac{1}{2}x^2 + \frac{i}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)$, puis $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + o(x^n)$.

Même principe pour le sinus. Si vraiment on n'aime pas cette méthode, on calcule les dérivées successives, qui sont périodiques de période 4 pour les deux fonctions.

- on peut démontrer la formule pour $\dfrac{1}{1-x}$ sans le moindre calcul de dérivée : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme géométrique), donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ (un des rares cas où on sait calculer très explicitement le reste du développement limité).
- le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ découle trivialement du précédent.
- pour celui de $\ln(1+x)$, on peut tricher un peu en « primitivant » celui de $\dfrac{1}{1+x}$ (on donnera le théorème dans le paragraphe de cours suivant), la constante d'intégration étant nulle puisque $\ln(1+0) = 0$.
- enfin, celui de $(1+x)^\alpha$ est un peu pénible à démontrer, il faut vraiment calculer la dérivée n-ème en 0, ce qu'on peut faire par récurrence, mais je vous dispense de la démonstration pour cette fois-ci.

$\square$

Exemple : Si la dernière formule donne parfois des calculs peu digestes, il est indispensable de connaître par coeur les premiers termes du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$) : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$.

2.3 Opérations sur les développements limités.

Comme dans le cas du calcul de dérivées, la connaissance des développements limités de fonctions usuelles ne suffit pas, il faut lui ajouter la capacité à calculer les développements limités de fonctions obtenues par sommes, produits, compositions, etc, de fonctions usuelles. Nous utiliserons les mêmes fonctions de base pour illustrer toutes les techniques de calculs vues dans ce paragraphe, qui sont à maîtriser absolument.

Proposition 10. Si f et g admettent des $DL_n(a)$, alors $f+g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est la somme de celles de f et de g.

Démonstration. C'est complètement évident, la somme de deux $o(x-a)^n$ étant bien sûr un $o(x-a)^n$. $\square$

Exemple : Le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x + \cos(x)$ est $e^x + \cos(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.

Définition 5. La **troncature** à l'ordre k d'un polynôme de degré $n > k$ est simplement obtenue en ne conservant dans le polynôme que ses termes de degré inférieur ou égal à k.

Remarque 7. Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et que $k < n$, on peut dire que f admet un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est la troncature à l'ordre k de celle de son développement à l'ordre n (on se contente de ne pas écrire les termes de degrés « trop gros »et de les inclure dans le o).

Proposition 11. Si f et g admettent des DL_n en 0, alors fg admet un DL_n et 0 dont la partie régulière est la troncature à l'ordre n du produit de celles de f et de g.

Démonstration. Là encore, c'est à peu près évident : si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$, alors $f(x)g(x) = P(x)Q(x) + o(x^n)$, les différents termes supplémentaires du produit étant tous de degré suffisamment grand pour être inclus dans le $o(x^n)$. $\square$

Exemple : En pratique, on se contente de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL. Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est $e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + o(x^5) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$.

Méthode : Nous n'énoncerons pas de propriété rigoureuse pour les calculs de développements limités de composées, car les calculs que nous allons faire ne sont pas si simples à justifier. En pratique, la méthode est assez intuitive : pour calculer un développement limité en 0 (c'est toujours plus simple) de $g \circ f$, on applique simplement le DL de la fonction g à la variable $f(x)$, à condition bien sûr qu'elle tende vers 0. Une rédaction soignée fera apparaître un changement de variable (on ne posera d'ailleurs pas toujours $u = f(x)$, parfois le changement de variable sera moins intuitif, justement dans les cas où $f(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0). Un bon exemple vaudra mieux qu'un long discours :

On ne change pas une équipe qui gagne, cherchons donc le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$. On commence par écrire $e^{\cos(x)} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$ (insérer directement des o dans la fonction par laquelle on compose est un abus de notation qu'on utilisera en permanence). L'expression dans l'exponentielle ne tendant pas vers 0, on ne peut pas « composer » par le DL de l'exponentielle immédiatement. Commençons alors par écrire $e^{\cos(x)} == e \times e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$. Maintenant l'expression dans la deuxième exponentielle (on la notera u) tend vers 0, on peut lui appliquer le DL de l'exponentielle, pour obtenir $e^{\cos(x)} = e\left(1 + u + \frac{1}{2}u^2\right) + o(x^5)$ (inutile d'aller plus loin pour obtenir un DL_5 à la fin, puisque $u \sim -\frac{1}{2}x^2$, donc $u^3 \sim -\frac{1}{8}x^6$ sera déjà inclus dans un $o(x^5)$). On peut expliciter : $e^{\cos(x)} = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^4\right) + o(x^5) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)$ en se débarassant bien sûr de tous les termes d'ordre plus grand que 5.

Méthode : Pour calculer des développements limités de quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\frac{u(x)}{1 + v(x)}$, avec v de limite nulle, ce qui permet de composer v par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ dont on connait le DL, puis d'effectuer un produit de DL.

Exemple : Calculons donc, pour boucler la boucle, un DL_5 en 0 de $x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$. On commence par écrire $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$. En notant $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, on applique le DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour trouver $\frac{1}{\cos(x)} = 1 - u + u^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ (comme dans le cas de la composée vu plus haut, un développements à l'ordre 2 selon la variable u suffit à obtenir de l'ordre 5 pour la variable x). Il ne reste plus qu'à faire le produit par l'exponentielle : $\frac{e^x}{\cos(x)} = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{10}x^5 + o(x^5)$.

Proposition 12. Si f admet un DL_n en a et F est une primitive de f, alors F admet un DL_{n+1} en a, dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière de f prenant pour valeur $F(a)$ en a.

Démonstration. C'est le résultat que nous avons utilisé dans la démonstration de la formule de Taylor-Young un peu plus haut. □

Proposition 13. Soit f une fonction admettant un DL_n en a, et telle que sa dérivée f' admette un DL_{n-1} en a, alors la partie régulière du DL_{n-1} de f' est la dérivée de celle du DL_n de f.

Démonstration. Ce résultat découle du précédent : si on suppose que f' admet un DL_{n-1} en a, on sait que f qui en est une primitive admet un DL_n dont la partie régulière est bien un polynôme dont le dérivé est la partie régulière du DL de f'. Attention tout de même aux hypothèses, il se peut très bien hélas que f admette un DL_n sans que f' admette un DL_{n-1}. □

Exemple : Pour terminer ce paragraphe sur les différentes techniques à maîtriser pour les calculs de développements limités, nous allons calculer de trois façons différentes le DL_5 et 0 de la fonction tangente.

- Première possibilité, faire le DL du quotient $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a déjà vu plus haut que $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^5)$, il ne reste plus qu'à faire le produit : $\tan(x) = \left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5\right) \times \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{5}{24}x^5 + o(x^5) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Deuxième possibilité : partir de $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, et intégrer un DL_4. On part de $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) = 1 + \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + \dfrac{5}{12}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Comme $\tan(0) = 0$, l'intégration donne $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Troisième possibilité : exploiter la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. On sait que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire, elle admet donc un DL_5 en 0 de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. On en déduit d'une part que $\tan'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^5)$, et d'autre part que $1 + \tan^2(x) = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5)$. Par identification des parties régulières de ces deux DL, on trouve les relations $a = 1$, puis $3b = a^2 = 1$, donc $b = \dfrac{1}{3}$, et enfin $5c = 2ab = \dfrac{2}{3}$, soit $c = \dfrac{2}{15}$. Bien sûr, les trois méthodes donnent le même développement.

2.4 Formulaire, deuxième partie.

Théorème 3. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\mathrm{th}(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4}\dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$

Démonstration.

- Pour la fonction tangente, les trois calculs effectués plus haut devraient suffire. Un petit complément en passant, les deux termes suivants de ce DL sont égaux à $\dfrac{17}{315}x^7$, puis à $\dfrac{62}{2\,835}x^9$, il n'existe assez manifestement pas de formule générale pour le DL de tangente, d'où le fait qu'on se contente ici de donner les trois premiers termes.
- Le développement limité de la fonction th n'est pas à connaitre puisque cette fonction ne fait pas partie de la liste de fonctions usuelles établie en début d'année. Je ne l'ai donné que pour signaler son étonnante similarité avec celui de la fonction tangente. Pour calculer ce DL, on dispose d'ailleurs des mêmes techniques que pour la fonction tan. On peut par exemple commencer par calculer un DL_5 de l'inverse $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$. On pose $u = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, la variable u tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut même préciser que $u \sim \dfrac{x^2}{2}$, ce qui permettra de n'effectuer la première partie de notre développement limité qu'à l'ordre 2 (on aura en effet $u^3 \sim \dfrac{x^6}{8} = o(x^5)$). On utilise bien sûr la formule vue précédemment dans le cours pour calculer $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$. Il ne reste plus qu'à effectuer un produit : $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x) \times \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \left(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4\right) + o(x^5)$
  $= x - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{24}x^5 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Pour la fonction arctan, le plus simple est d'exploiter la dérivée $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme x^2 a pour limite 0 lorsque x tend vers 0, on peut appliquer le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ en remplaçant les x par des x^2 dans la formule (techniquement il s'agit en fait d'une composition où on a posé $u = x^2$). On obtient alors, à l'ordre $2n$, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ (la fonction étant bien sûr paire, il n'y aura que des puissances paires dans ce DL). Il ne reste

plus qu'à primitiver ce DL, sans ajouter de constante puisque la fonction arctan s'annule en 0, et on trouve comme prévu $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

- On peut utiliser pour la fonction arcsin la même technique que ci-dessus pour la fonction arctan. Rappelons que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Commençons par calculer le DL_{2n} de $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$ (même principe que ci-dessus pour celui de $\frac{1}{1+x^2}$). On peut bien sûr composer ce DL par celui vu plus haut dans le cours de $\sqrt{1+u}$ en posant $u = x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+2})$ (variable qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0), mais il est hélas compliqué d'obtenir une formule générale simple pour le coefficient d'ordre $2n$ de ce DL, formule qui existe pourtant bel et bien ! Contentons-nous d'effectuer le calcul à l'ordre 5, ce qui ne nécessite pour la première étape du calcul que de l'ordre 2 (cf le calcul du DL de th un peu plus haut pour la justification rigoureuse de ce calcul raccourci) : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(x^5)$, donc $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}(x^2+x^4) - \frac{1}{8}(x^2+x^4)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$. On peut désormais primitiver l'expression obtenue (toujours sans ajouter de constante puisque $\arcsin(0) = 0$) pour trouver $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$, ce qui correspond bien à la formule annoncée dans le théorème.
- Aucun calcul nécessaire pour la dernière fonction de la liste puisqu'on sait (si on n'a pas oublié les recoins obscurs du chapitre sur les fonctions trigonométriques réciproques) que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, égalité valable sur tout l'intervalle de définition de ces deux fonctions.

□

3 Applications des calculs de développements limités.

Jusqu'ici, les développements limités n'ont été vus dans ce chapitre que comme une occasion de vous faire aligner des calculs relativement barbares, dans le but finalement obscur d'approcher une fonction donnée par un polynôme au voisinage d'un point donné. Pourquoi pas, mais en pratique, ça sert à quoi ? Pour terminer ce chapitre, nous allons détailler quelques exemples de calculs rendus beaucoup plus simples (voire même tout simplement possibles) par l'utilisation des développements limités. Aucun théorème à apprendre dans cette section du cours, on va se contenter d'exemples, mais les méthodes vues dans les deux derniers paragraphes doivent absolument être maîtrisées et font donc vraiment partie intégrante du cours sur les développements limités.

3.1 Calculs de limites

Première application toute bête, le calcul de limites trop compliquées à obtenir par des méthodes classiques. Théoriquement, les développements limités permettent de calculer n'importe quelle limite puisqu'ils permettent de « transformer » n'importe quelle fonction en polynôme, et qu'on sait très bien calculer des limites de polynômes (et de produit, quotient ou composées de polynômes) à n'importe quel endroit. En pratique, c'est un peu plus compliqué. Déjà on ne peut pas calculer des développements limités de n'importe quelle fonction à n'importe quel endroit. Par exemple, une limite classique comme $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$ ne pourra jamais être obtenue par ce genre de méthode (de façon générale, tous les résultats de croissance comparée resteront indispensables). Par ailleurs, on ne sait bien calculer nos développements limités qu'en 0. Si on a une variable (pour une suite ou une fonction) qui tend vers autre chose que 0, il faudra donc commencer par effectuer un changement de variable pour se ramener à un paramètre qui tend vers 0. Cette variable ne sera du coup plus toujours un réel x, ce qui nous fera en fait régulièrement sortir du cadre des stricts développements limités pour faire ce qu'on appellera plutôt des développements asymptotiques. Un développement asymptotique, c'est en gros l'écriture d'une expression mathématique sous la forme d'une somme de termes « de plus en plus petits » (autrement dit, chaque terme de la somme est négligeable par rapport à celui qui le précède) et conclue par un o, mais sans nécessairement que ces termes soient simplement des puissances de la variable. Ainsi, $1 + x - 3x^2 + o(x^2)$ est un développement limité quand x tend vers 0, mais on pourra dire qu'une expression du type $n+1-\dfrac{2}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est un développement asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$. On parlera plus précisément pour cet exemple de développement asymptotique à trois termes (il y a trois ordres de grandeur différentes avant le o), ou de développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n}$ (ici l'ordre est simplement ce qu'on met dans le o).

Un premier exemple simple.

On veut calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Ce genre de calcul de limite intervient naturellement quand on prolonge des fonctions faisant intervenir du ln par continuité, et qu'on cherche à savoir si la fonction prolongée est dérivable (on verra un peu plus loin que, dans ce genre de cas, on peut effectuer tous les calculs d'un seul coup). Sans utilisation de développement limité, on a une forme indéterminée dont on ne peut pas se dépêtrer. Avec les DL, ça devient presque trop facile, on effectue un DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en anticipant le fait que le x va se simplifier au numérateur, et on écrit tout simplement $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \dfrac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2} = \dfrac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}+o(1)$ (quand on simplifie par x^2, il faut bien faire attention à diviser également par x^2 ce qui se trouve dans le o). Ce qu'on vient d'obtenir revient exactement à dire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Un deuxième exemple beaucoup moins simple.

On souhaite calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$. On admettra que cette fonction est bien définie au voisinage de $+\infty$ sans le démontrer.

Le premier réflexe ici doit être d'écrire la fonction sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x^2\ln(x\sin(\frac{1}{x}))}$. Il faut bien faire attention ici au fait que notre variable x tend vers $+\infty$, il est donc hors de question d'écrire des développements limités faisant intervenir cette variable x. Par contre, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, et on peut donc écrire sans problème que $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ (techniquement, si on veut être hyper rigoureux, on effectue un changement de variable en posant $u = \dfrac{1}{x}$, et l'expression obtenue n'est bien sûr pas un développement limité mais un développement asymptotique puisqu'on n'a plus vraiment un polynôme sous les yeux). Aucun problème ensuite pour multiplier tout cela par x (y compris le o, comme toujours) : $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. C'est merveilleux, on se retrouve donc à l'intérieur de notre ln avec une expression de la forme « 1+truc », avec un truc qui tend vers 0. Même plus besoin de développements limités à partir de cette étape, on se contente d'équivalents : $\ln\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \sim -\dfrac{1}{6x^2}$, et $x^2\ln\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \sim -\dfrac{1}{6}$ (ce qui revient à dire que toute l'expression à l'intérieur de l'exponentielle a pour limite $-\dfrac{1}{6}$). Autrement dit, on obtient la conclusion suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{6}}$. Il va de soi qu'obtenir une telle valeur par une autre méthode serait bien compliqué.

Une dernière remarque pour conclure ce bel exemple : il était nécessaire d'effectuer un développement limité du sinus à l'ordre 3 (au moins) pour retrouver à la fin un simple équivalent (et donc notre limite). On pouvait anticiper cela en constatant qu'il y aurait à effectuer un produit par x puis un autre par x^2, mais admettons que c'est tout de même loin d'être totalement clair. Dans le doute, il vaut mieux écrire un DL à un ordre un peu trop élevé au départ plutôt que d'avoir à refaire tous les calculs.

Un dernier exemple avec des suites.

On cherche cette fois-ci à calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$. Commençons déjà par constater qu'on a bel et bien une méchante forme indéterminée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (si vous n'êtes vraiment pas convaincu, écrivez-le sous la forme $2^{\frac{1}{n}}$, voire carrément sous la forme exponentielle $e^{\frac{1}{n}\ln(2)}$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{2} = 3$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt[n]{3} = 2$, donc tout ce qui se trouve dans la parenthèse a pour limite 1. Quand on élève ceci à une puissance qui tend vers $+\infty$, on a bien une forme indéterminée.

Pour simplifier un peu l'expression de u_n, commençons par écrire que $\ln(u_n) = n\ln(3\times 2^{\frac{1}{n}} - 2\times 3^{\frac{1}{n}})$. On va même carrément poser une suite auxiliaire $v_n = 3\times 2^{\frac{1}{n}} - 2\times 3^{\frac{1}{n}}$ et écrire à nouveau nos puissances sous forme exponentielle : $v_n = 3e^{\frac{1}{n}\ln(2)} - 2e^{\frac{1}{n}\ln(3)}$. Les expressions à l'intérieur de chaque exponentielle ont une limite nulle (bien entendu, n tend ici vers $+\infty$), on peut donc en faire un développement limité à l'ordre 1 (ça suffira pour la suite du calcul, mais si on est prudent, on ira typiquement jusqu'à l'ordre 2 dans ce type de calcul), qui sera d'ailleurs techniquement un développement asymptotique puisque la variable est ici $\dfrac{1}{n}$ plutôt que le traditionnel x. Bref, on obtient $v_n = 3\left(1 + \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1 + \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 + \dfrac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Merveilleux, on a une expression de la forme « 1+truc » à mettre dans un ln pour remonter jusqu'au calcul de $\ln(u_n)$! Contentons-nous (comme dans l'exemple précédent de calcul de limite sur une fonction) de travailler désormais avec des équivalents : $\ln(v_n) = \ln\left(1 + \dfrac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \dfrac{3\ln(2) - 2\ln(3)}{n}$, puis $\ln(u_n) = n\ln(v_n) \sim 3\ln(2) - 2\ln(3)$. Autrement dit, on a simplement $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 3\ln(2) - 2\ln(3)$. Il ne reste plus qu'un petit passage à l'exponentielle à effectuer : $\lim u_n = e^{3\ln(2)-2\ln(3)} = \dfrac{e^{3\ln(2)}}{e^{2\ln(3)}} = \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$. Un résultat pour le moins inattendu.

3.2 Étude locale de fonctions.

Les développements limités sont particulièrement efficaces pour étudier de façon très précise une fonction à un endroit donné (c'est même leur objectif initial !). Ainsi, le fait de connaitre un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f en a donne d'un seul coup les trois informations suivantes :

- comme la fonction admet un DL_0 en a, elle est continue en a, et la partie régulière de ce DL_0 (qui est donc simplement une constante) représente la valeur de $f(a)$. C'est encore plus intéressant quand on effectue ce genre de calcul sur une fonction qui n'était a priori pas définie en a, puisque le calcul du DL_0 permettra donc d'effectuer un prolongement par continuité de la fonction f au point a.
- si la fonction admet un $DL_1(a)$, on peut cette fois-ci affirmer que f est dérivable en a, et le coefficient devant $x - a$ dans le DL_1 correspond à la valeur de $f'(a)$. Autre façon de voir les choses, la partie régulière de ce DL_1 représente tout simplement l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a. Dans le cas d'une fonction qui

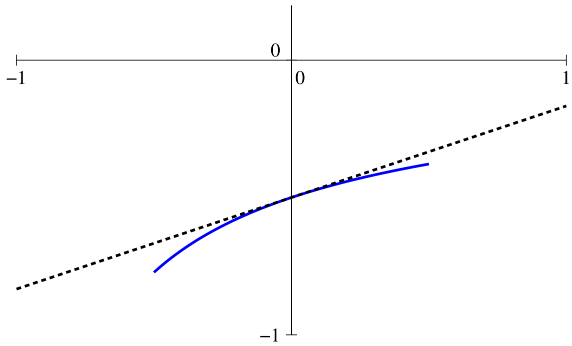
n'était initialement pas définie en a, le calcul d'un $DL_1(a)$ permet donc à la fois de prouver la présence d'un prolongement par continuité, et de prouver la dérivabilité en a de la fonction prolongée.
- enfin, si on a poussé le calcul jusqu'à obtenir un $DL_2(a)$, le terme d'ordre 2 de ce DL_2 va nous fournir un équivalent de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente en a, qui donnera le signe local de cette différence et permettra donc d'en déduire la position relative de la courbe et de sa tangente. Pour mieux comprendre comment cela fonctionne, prenons tout de suite un exemple concret.

Un exemple simple d'étude locale en 0**.**

L'étude locale d'une fonction (ailleurs qu'en $\pm\infty$, cas particulier que nous évoquerons dans l'exemple suivant) consiste à faire (en un seul calcul de développement limité) l'étude des trois points signalés ci-dessus. Prenons pour ce premier exemple un cas où on n'a presque pas besoin de calcul (on va donc se concentrer sur l'interprétation) en posant $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ et en étudiant la fonction en 0 (autrement dit, on reprend et on développe le calcul de limite présenté un peu plus haut pour cette même fonction). On est ici dans le cas intéressant d'une fonction a priori non définie en 0, mais ça ne change rien au principe général, il faut commencer par calculer un développement limité à l'ordre 2 au moins (on précisera les choses à ce sujet après le calcul) de la fonction f en 0 (si on n'y arrive pas ou si on obtient une expression qui n'est pas un vrai développement limité et qui n'a notamment pas une limite finie en 0, ça veut tout simplement dire que la fonction f n'est pas prolongeable par continuité au point considéré). Ici, c'est immédiat, il faut simplement penser à écrire initialement un développement limité à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ en anticipant la division par x^2 qui va « faire perdre deux degrés » : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. On interprète ensuite ce calcul en trois temps comme expliqué ci-dessus (attention à bien respecter la rédaction, notamment pour la position relative de la courbe et de la tangente, si vous voulez être rigoureux) :

- On commence par dire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, autrement dit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Cela revient exactement à justifier l'existence d'un prolongement par continuité de f en 0, en posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ (pour rédiger vite et mal).
- Ensuite on écrit que $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}x + o(x)$, et ce DL_1 prouve que la fonction f est dérivable en 0 et que sa courbe admettra à cet endroit une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}$. Si on préfère cela revient à dire que $f'(0) = \dfrac{1}{3}$.
- Enfin, on écrit que $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)$, et on en déduit que $f(x) - \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{4}x^2$ (il est **obligatoire** d'écrire cet équivalent pour en déduire correctement ce qui va suivre, la forme initiale du développement limité avec un o n'est pas suffisante). Comme $-\dfrac{1}{4}x^2$ est une expression négative, on en déduit que $f(x) - \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right)$ est négatif **au voisinage de** 0 (attention, l'équivalence assure simplement que les deux expressions auront le même signe sur un voisinage de 0 qu'on ne maitrise absolument pas, et il est bien sûr hors de question de prétendre que le signe restera le même sur $\mathbb{R}$ tout entier ; si vraiment on veut étudier la position relative sur $\mathbb{R}$, on revient à une étude classique du signe de notre différence). Autrement dit, on a prouvé que la courbe représentative de f serait en-dessous de sa tangente sur un voisinage de 0. On peut illustrer ceci par un petit dessin, où on se restreint volontaire à ne dessiner qu'un petit morceau de courbe aux alentours de 0, puisque toutes les informations obtenues

sont locales. Même indiquer une unité sur l'axe des abscisses est déjà un abus puisqu'on ne sait vraiment pas la largeur de l'intervalle sur lequel nos conclusions seront correctes.



Une dernière remarque : si par malheur le terme en x^2 s'annule dans notre développement limité, on va être bien embêtés pour déterminer la position relative de la courbe et de sa tangente. Dans ce cas, on n'a pas d'autre choix que de pousser un peu plus loin le calcul et aller jusqu'à un DL_3 de la fonction, et ce sera bien entendu le terme en x^3 qui donnera dans ce cas la position relative (si on est en 0, ce terme en x^3 changera de signe en 0, ce qui revient à dire que la position relative sera différente à gauche et à droite de 0 ; c'est tout à fait normal puisque le fait qu'il n'y ait pas de terme en x^2 dans le DL signifie que $f''(0) = 0$, et donc qu'il y a sur la courbe un point d'inflexion à cet endroit).

Un exemple classique d'étude locale en $+\infty$.

Les calculs présentés ci-dessus peuvent aussi très bien s'adapter à une étude locale en $+\infty$. Cette fois-ci le but ne sera évidemment pas de prolonger une fonction par continuité (ça n'aurait aucun sens), ni d'obtenir une position relative par rapport à une tangente, mais bel et bien de déterminer l'équation (et la position relative) d'une droite qui joue en quelque sorte le rôle de la tangente à la courbe quand la variable tend vers $+\infty$: une asymptote. Il y a une complication évidente, c'est justement que la variable tend vers $+\infty$ et qu'on ne pourra donc évidemment pas effectuer des calculs de développement limité come si de rien n'était. En fait, le principe sera toujours le même : puisqu'il faut « se ramener à 0 » pour pouvoir calculer des développements limités sereinement, on effectuera **systématiquement** un changement de variable du type $X = \dfrac{1}{x}$ pour avoir une variable X qui tend vers 0. Par ailleurs, les calculs qu'on effectuera ne seront en général pas tout à fait des calculs de développements limités, mais plutôt de développements asymptotiques, il restera typiquement des termes en $\dfrac{1}{X}$ qu'on ne trouverait pas dans un DL classique (ce qui est d'ailleurs tout à fait normal, si la courbe de la fonction admet en $+\infty$ une asymptote oblique, c'est que la fonction n'y a pas une limite finie). Allez, trêve de bavardages, un calcul simple pour commencer :

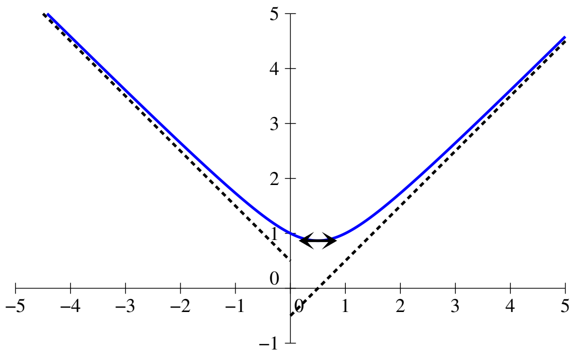
On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ (la fonction est bien définie et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine carrée est strictement positif). L'étude des variations ne pose aucun problème : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$, f admet donc en $\dfrac{1}{2}$ un minimum de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On ne s'embêtera même pas à préciser les limites en $\pm\infty$ puisqu'elles vont découler des calculs qui suivent.

On souhaite donc étudier plus précisément la fonction en $+\infty$. Pour cela, comme décrit ci-dessus, on pose $X = \dfrac{1}{x}$ et on écrit $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{X} + 1} = \sqrt{\dfrac{1 - X + X^2}{X^2}}$. Puisqu'on est du côté de $+\infty$, on peut passer le $\sqrt{X^2}$ du dénominateur dans le membre de gauche pour obtenir $Xf(x) = \sqrt{1 - X + X^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$, on peut poser $u = -X+X^2$ (qui a également une limite nulle) et faire un DL de la racine carrée en utilisant la formule vue dans ce cours : $\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$ (en général, un DL à l'ordre 2 sera suffisamment pour obtenir toutes les informations souhaitées, mais aller jusqu'à l'ordre 3 peut être plus prudent, on aura typiquement des problèmes si le troisième terme du DL s'annule inopinément), soit $\sqrt{1-X+X^2} = 1-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{8}X^2+o(X^2) = 1-\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}X^2+o(X^2)$. Une fois ce beau DL obtenu, on divise tout par X puis on remonte le changement de variable, c'est-à-dire qu'on retransforme tout simplement les X en $\frac{1}{x}$, ce qui donne ici $f(x) \underset{X\to 0}{=} \frac{1}{X} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X + o(X) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il est temps d'interpréter ce développement asymptotique, ce qui va se faire en trois temps comme pour la tangente dans notre exemple précédent :

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, ce qui prouve tout simplement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (certes, on poivait effectuer ce calcul beaucoup plus rapidement et simplement, mais dans des cas plus complexes, on obtiendra la limite sans trop se poser de questions via le calcul de développement asymptotique).
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{2} + o(1)$, ce qui revient exactement à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$, et donc prouve que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- enfin, $f(x)-\left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$ (comme dans le cas des tangentes, il est indispensable d'écrire cette étape sous forme d'équivalent). Comme $\frac{3}{8x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la courbe est située au-dessus de sa tangente dans un voisinage (hélas indéterminé) de $+\infty$.

On n'en a pas tout à fait fini avec la fonction f car on peut aussi s'intéresser ici à ce qui se passe du côté de $-\infty$. Inutile de refaire tout le calcul, le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ sera tout aussi valable et conduira au même calcul à un détail près : quand on a passé dans le membre de gauche le $\sqrt{X^2}$, ce sera cette fois-ci un $-X$ qui fera son apparition, ce qui va tout simplement changer tous les signes dans le développement asymptotique final. Les conclusions seront toutefois très similaires : asymptote oblique d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$, et courbe localement au-dessus de l'asymptote, puisque l'équivalent $-\frac{8}{3x}$ sera positif au voisinage de $+\infty$. On peut désormais compléter le tableau de variation et surtout tracer une allure de courbe beaucoup plus précise pour la fonction f :

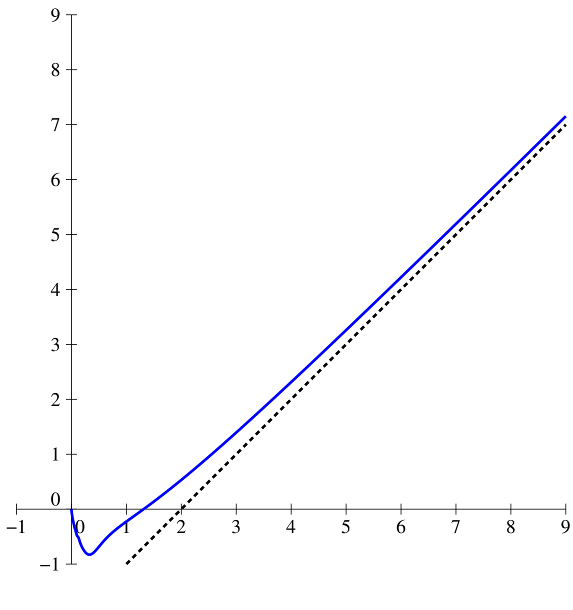


Un exemple plus compliqué en $+\infty$.

On pose $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} - 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et on souhaite étudier f au voisinage de $+\infty$. On commence donc par effectuer le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, ce qui donne ici, $f(x) = \dfrac{1}{X(X+1)}e^{\sin(X)} - \dfrac{2}{X}\ln(1+X)$. Pour avoir des fonctions définies en 0 et pouvoir effectuer un « vrai » *DL*, l'astuce toute simple déjà utilisée dans le calcul prévédent fonctionne : $Xf(x) = \dfrac{e^{\sin(X)}}{1+X} - 2\ln(1+X) = (e^{X-\frac{1}{6}X^3+o(X^4)})(1-X+X^2-X^3+o(X^3)) - 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = \left(1+X-\dfrac{1}{6}X^3+\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{6}X^3+o(X^3)\right)(1-X+X^2-X^3+o(X^3)) - 2X + X^2 - \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1-X+X^2-X^3+X-X^2+X^3+\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2}X^3-2X+X^2-\dfrac{2}{3}X^3+o(X^3) = 1-2X+\dfrac{3}{2}X^2-\dfrac{7}{6}X^3+o(X^3)$.

Le calcul de *DL* a ici été effectué à l'ordre 3 par souci de prudence, mais notre quatrième terme ne servira à rien. En règle générale, il vaut mieux être prudent et viser « un ordre trop loin » au cas où le dernier terme s'annule, sinon il faudra refaire tous les calculs pour retrouver la position relative de la courbe et de l'éventuelle asymptote). Aprè avoir divisé par X, on obtient donc $f(x) = \dfrac{1}{X} - 2 + \dfrac{3}{2}X + o(X) = x - 2 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Il est temps d'interpréter ce développement asymptotique :

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x-2+o(1)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- enfin, $f(x)-(x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$. Comme $\dfrac{3}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la courbe est située au-dessus de sa tangente au voisinage de $+\infty$. On peut bien sûr là aussi donner une allure de portion de courbe pour illustrer (on se gardera bien d'essayer d'étudier plus complètement la fonction f, on n'y arriverait de toute façon pas !). J'ai tout de même donné toute la courbe dans la figure ci-dessous :



3.3 Développements asymptotiques de suites.

Dernier type d'application des calculs de développements limités que nous verrons dans ce chapitre, l'obtention d'informations sur des suites dont on n'est pas capables de calculer exactement le terme général. Ce sera typiquement le cas de suites définies implicitement (si vous avez oublié tout ce qu'on a déjà vu sur les suites implicites, je vous laisse relire la dernière partie du cours du chapitre sur la continuité). Le principe ici est d'obtenir un développement asymptotique, c'est-à-dire d'écrire que le terme général u_n de la suite est égal à une somme de termes de plus en plus en plus négligeables quand n tend vers $+\infty$ (avec un o au bout puisqu'on n'obtiendra bien sûr jamais une égalité parfaite). En fait, il s'agit de généraliser en quelque sorte les renseignements obtenus lorsqu'on calcule la limite de la suite, puis un équivalent de son terme général (dans le cas où la limite est infinie ou égale à 0). Un exemple où je mets des termes aléatoires : on prouve dans un premier temps que la suite tend vers $+\infty$, puis on arrive à obtenir un équivalent de la forme $u_n \sim 2n$ (c'est plus précis que la limite), puis on « complète » cet équivalent par un terme négligeable par rapport à n, par exemple $u_n = 2n + 3 + o(1)$, ou encore $u_n = 2n + \ln(n) + o(\ln(n))$ (attention, dans ce genre de calcul, il n'y a aucune raison a priori que tous nos termes soient « polynômiaux », même si ce sera le cas le plus fréquent), puis on peut espérer aller encore plus loin, par exemple $u_n = 2n + \ln(n) + 3 - \dfrac{1}{2\ln(n)} + \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (dans ce exemple, les termes sont bien classés par ordre de grandeur décroissant).

Une ou deux remarques supplémentaires avant de se lancer dans les calculs : bien sûr, tous ces développements s'effectueront à partir d'une variable n qui tend vers $+\infty$, si on calcule en cours de route de vrais développements limités, il faudra donc bien faire attention à les appliquer à une expression qui tend vers 0, typiquement à $\dfrac{1}{n}$ (on fera le calcul directement sans poser de changement de variable pour ne pas alourdir les calculs, mais théoriquement il faudrait le faire). Par ailleurs, on aura souvent besoin pour obtenir un développement asymptotique à plusieurs termes d'effectuer plusieurs calculs successifs et similaires pour faire apparaitre les différents termes « un par un » en exploitant à chaque fois le résultat du calcul précédent. C'est un peu différent de ce qu'on fait lors d'un calcul de développement limité où on fixe dès le départ l'ordre auquel on va effectuer le calcul, et on ne fait ensuite le calcul qu'une seule fois. Dans certains cas, on pourra toutefois effectuer un seul calcul avec une rédaction du type « identification des coefficients » (comme la méthode de calcul de DL_5 de la fonction tan à partir de l'équation différentielle $\tan' = 1 + \tan^2$, par exemple), mais il faudra pour cela déjà connaitre la forme générale du développement asymptotique, ce qui n'est pas toujours évident. On donnera cette méthode dans le premier exemple ci-dessous, mais après avoir effectué un premier calcul par la méthode « classique ».

Développement d'une suite implicite classique.

Nous allons reprendre pour ce premier exemple très détaillé l'étude de la suite implicite déjà reprise un peu plus haut dans ce chapitre : u_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. On a vu ci-dessus que $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, essayons maintenant d'aller un peu plus loin.

Il faudrait pour cela trouver un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ pour préciser un peu ce qui se trouve pour l'instant dans le $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Il va être temps de recourir à un calcul de développement limité : on part de l'égalité $u_n = \dfrac{e^{u_n}}{n}$, et on va simplement remplacer dans l'exponentielle u_n par le début de son développement asymptotique, pour pouvoir écrire un développement limité de l'exponentielle (à l'ordre 2 en la variable $\dfrac{1}{n}$ puisque ce qu'on met dans l'exponentielle est pour l'instant d'ordre 2), et la division par n va magiquement nous transformer ce développement à l'ordre $\dfrac{1}{n^2}$ en développement à l'ordre $\frac{1}{n^3}$, nous donnant par là même un terme de plus dans le développement asymptotique de u_n. Écrivons le calcul : $u_n = \frac{1}{n}e^{u_n} = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Pour le DL de l'exponentielle, on a techniquement posé $u = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et on a fait tranquillement notre développement à l'ordre 2 comme prévu. Remarquons que ceux qui s'attendaient à pouvoir deviner facilement les termes du développement asymptotique de u_n à partir des calculs précédents ont vraisemblablement déjà changé d'avis.

Maintenant qu'on a compris le principe, on peut constater quelque chose d'assez fascinant : si on reprend notre calcul de développement limité avec l'information acquise lors du dernier calcul, on obtiendra automatiquement un terme supplémentaire, et on peut ainsi, quitte à refaire beaucoup de fois ce même calcul, obtenir un développement asymptotique à une précision arbitraire de u_n, c'est assez magique. Contentons-nous d'un dernier tour de moulinette : $u_n = \frac{e^{u_n}}{n} = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{8}{3n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Je n'ai pas détaillé le calcul du DL de l'exponentielle, il faut sûr faire attention à ne pas oublier de termes en développement le carré ou le cube de notre somme, et cela devient bien sûr de plus en plus délicat si on effectue encore d'autres étapes de calcul.

La méthode présentée ci-dessous est la seule que je vous demande de maitriser, mais je vais tout de même vous en présenter une autre qui a l'immense mérite de ne nécessiter qu'un seul calcul, mais le gros défaut de demander qu'on sache dès le départ à quoi ressemble le développement asymptotique de la suite. Supposons donc qu'on ait deviné que notre développement serait (si on le pousse jusqu'à quatre termes) de la forme $u_n = \frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, avec bien sûr a, b, c et d qui sont des constantes réelles à déterminer. On peut alors écrire directement, sur le modèle des calculs précédents, que $u_n = \frac{e^{u_n}}{n} = \frac{1}{n}e^{\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})}$

$$= \frac{1}{n}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{a^2}{2n^2}+\frac{b^2}{2n^4}+\frac{ab}{n^3}+\frac{ac}{n^4}+\frac{a^3}{6n^3}+\frac{a^2b}{2n^4}+\frac{a^4}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n}+\frac{a}{n^2}+\frac{2b+a^2}{2n^3}+\frac{6c+6ab+a^3}{6n^4}+\frac{24d+12b^2+24ac+12a^2b+a^4}{24n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Beurk. Bon, il ne reste plus qu'à identifier tout ça avec ce dont on est partis (comme pour un développement limité, la « partie régulière » d'un développement asymptotique de ce genre est nécessairement unique) : le coefficient en $\frac{1}{n}$ donne $a = 1$; celui en $\frac{1}{n^2}$ donne $b = a$, donc $b = 1$; puis celui en $\frac{1}{n^3}$ donne $c = \frac{2b+a^2}{2}$, donc $c = \frac{3}{2}$; ensuite, celui en $\frac{1}{n^4}$ donne $d = \frac{6c+6ab+a^3}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$; et on a même poussé le calcul un cran trop loin puisqu'on voit que le terme en $\frac{1}{n^5}$ sera de la forme $\frac{24d+12b^2+24ac+12a^2b+a^4}{24n^5} = \frac{64+12+36+12+1}{24n^5} = \frac{125}{24n^5}$.

Conclusion ébouriffante de ce brillant calcul : $u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{2n^3}+\frac{8}{3n^4}+\frac{125}{24n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)$.

Un exemple encore beaucoup plus laid.

Pour tout entier naturel n, on définit le réel u_n comme étant l'unique solution positive de l'équation $x^4+x^3 = n$. Cette équation admet effectivement une solution unique puisque la fonction $g : x \mapsto x^4+x^3$, qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, effectue une bijection de $[0,+\infty[$

sur lui-même. Comme dans notre premier exemple, déterminer un développement asymptotique de la suite consiste à en trouver un équivalent, puis un équivalent de la différence entre u_n et son équivalent, et ainsi de suite, pour obtenir une valeur approchée de u_n comme somme de termes d'ordres de grandeur décroissants.

Dans notre cas, on peut commencer par remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet, en notant g^{-1} la réciproque de g sur $[0,+\infty[$, $u_n = g^{-1}(n)$, et d'après le théorème de la bijection, $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty$. Une fois qu'on connait cette limite, on peut écrire que $u_n^3 = o(u_n^4)$, ou encore que $u_n^4 + u_n^3 \sim u_n^4$. Comme par définition $u_n^4 + u_n^3 = n$, on en déduit que $u_n^4 \sim n$, soit $u_n \sim n^{\frac{1}{4}}$. Pour obtenir cet équivalent, on a en fait utilisé, en factorisant l'équation par u_n^4, que $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+o(1)} \sim n$.

On dispose maintenant d'une information supplémentaire, qui va nous permettre de refaire le calcul à un ordre plus précis (n'oubliez pas pour le calcul que $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers 0, ce qui permet d'utiliser les *DL* classiques du cours) : $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+n^{-\frac{1}{4}}+o(n^{-\frac{1}{4}})} = n(1-n^{-\frac{1}{4}}+o(n^{-\frac{1}{4}})) = n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}})$. Il ne reste plus qu'à passer tout ça à la puissance $\dfrac{1}{4}$ (en exploitant le développement limité classique de $(1+x)^\alpha$ avec bien sûr $\alpha = \dfrac{1}{4}$, dont le début va être $(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \dfrac{1}{4}x + o(x)$) : $u_n = (n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \times (1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}}\left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + o(1)$.

Si on est (très) courageux, on peut reprendre le calcul pour obtenir un terme de plus, ce qui va être nettement plus pénible car, outre les factorisation nécessaires pour bien appliquer nos développements limités à des variables qui tendent vers 0, il faudra en plus effectuer un vrai *DL* de quotient pour « faire remonter » le u_n initialement au dénominateur vers le numérateur du dénominateur de notre fraction (oui c'est vraiment moche). Allons-y : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + o(1)} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n^{-\frac{1}{4}}\left(1 + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$.
On enchaîne : $u_n^4 = \dfrac{n}{1+\frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1+n^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}+o(n^{-\frac{1}{2}})} = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$. On passe une dernière fois le tout à la puissance $\dfrac{1}{4}$ (le terme d'ordre 2 dans le développement de $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ est égal à $\dfrac{\frac{1}{4}\times(-\frac{3}{4})}{2}x^2 = -\dfrac{3}{32}x^2$) : $u_n = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{16}n^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{32}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$.
Conclusion de ce sublime calcul : $u_n = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{32n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$.