

Programme de colle n° 25

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 29/04 au 03/05 2024

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 19 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ quand E et F sont de dimension finie.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand (e_1, \dots, e_n) est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- Notation f^n pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, **théorème du rang**.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie). Majoration du rang d'une composée : $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- Formes linéaires et hyperplans, un hyperplan H est supplémentaire de toute droite qui n'est pas incluse dans H (mais on n'a pas vraiment étudié de cas en dimension infinie).
- Applications linéaires « géométriques » :
 - homothéties
 - projection sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G , **caractérisation des projections par la relation $p^2 = p$** , caractérisation des sous-espaces F et G comme image et noyau de la projection p , caractérisation de l'image comme $\ker(p - \text{id})$
 - symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G , caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \text{id}$, caractérisation des sous-espaces F et G comme noyaux de $s - \text{id}$ et de $s + \text{id}$, relation $s = 2p - \text{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

Chapitre 20 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.

- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (deux versions, l'une complexe, l'autre réelle, aucune n'a été démontrée), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X - a$ puis évaluation pour $X = a$, ou calcul de $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G = (X - a)^2 F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite; changement de variable pour se ramener à un pôle nul dans le cas d'un pôle multiple, éventuellement après avoir soustrait la partie polaire correspondant à d'autres pôles; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2 + aX + b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).

Prévisions pour la semaine suivante : fractions rationnelles, probas.