Programme de colle n$^{\text{o}}$ 20

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 11/03 au 15/03 2024

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 15 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée, et propriétés élémentaires.
- Racines d'un polynôme :
  - notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, **division euclidienne**
  - **factorisation d'un polynôme par $X-a$ quand a est racine de P**, nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n, principe d'identification des coefficients
  - polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, théorème de d'Alembert-Gauss
  - relations coefficients racines (pas de formule générale, mais à savoir retrouver très rapidement pour un polynôme de degré 3 ou 4)
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:
  - polynôme irréductible, caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
  - PGCD, PPCM de deux polynômes ou d'une famille de polynômes, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, polynômes premiers entre eux
  - décomposition en produit de facteurs irrédutibles dans $\mathbb{R}[X]$ (on doit être capable de **justifier le résultat** en partant de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant que si z est racine de P alors $\overline{z}$ l'est aussi avec la même multiplicité, puis en calculant le produit $(X-z)(X-\overline{z})$ pour faire apparaitre les coefficients réels)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- **formule de Taylor pour les polynômes** (on a fait la démonstration dans le cas où $P = X^i$ puis très rapidement invoqué la linéarité pour justifier le cas général).

Chapitre 16 : Analyse asymptotique.

- Négligeabilité et équivalence :

- définition pour les suites (sous la forme $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$), notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$
- manipulations et règles de calcul (produits et quotients, passage des équivalents à une puissance quelconque, équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$, on a bien sûr insisté sur l'interdiction d'additionner des équivalents ou de les composer par d'autres fonctions que les fonctions puissances), on autorise les abus de notation du type « $o(v_n)+o(v_n)=o(v_n)$ »
- extension aux fonctions réelles
- croissances comparées, équivalents classiques issus de taux d'accroissements ($\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$)

Prévisions pour la semaine suivante : développements limités.