

Chapitre 2 : Applications, outils de calcul sur les réels.

MPSI Lycée Camille Jullian

20 septembre 2023

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Blaise PASCAL.

*Le calcul que vous trouvez si mauvais est pourtant celui de toutes les passions.
Des années entières de poursuite, pour la jouissance d'un moment.*

DENIS DIDEROT

Nous allons continuer à explorer un domaine assez théorique dans la première partie de ce chapitre, consacré à la notion fondamentale d'application (qui correspond à peu de choses près à ce que vous appelez plus simplement une fonction). Le but de cette étude est notamment d'introduire la notion de bijection qui sera ensuite essentielle quand nous passerons à l'étude plus concrète des fonctions usuelles. Du concret, il y en aura toutefois déjà dans ce deuxième chapitre puisque nous y étudierons également les techniques de calcul classiques à maîtriser dans \mathbb{R} , notamment tout ce qui concerne les résolutions d'équations et manipulations d'inégalités.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser les notions d'application injective et surjective, y compris pour des applications autres que celles de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- maîtrise des règles de calcul sur les inégalités, sur les valeurs absolues, et connaissance des identités remarquables.

1 Applications.

Vous avez l'habitude depuis quelques années déjà de manipuler en mathématiques ce que vous appelez des fonctions, sortes de boîtes noires permettant de calculer à l'aide d'une formule une valeur réelle dépendant d'une valeur initiale variable souvent notée x . Une application, c'est à peu près exactement la même notion (certains auteurs distinguent les deux notions de façon subtile, mais ce ne sera pas notre cas cette année), mais étendue de façon à pouvoir s'appliquer à des ensembles beaucoup plus variés que \mathbb{R} . Nous allons donner de ces applications une définition assez abstraite, mais en pratique, nous continuerons à manipuler les fonctions réelles comme vous en avez l'habitude. Il faudra par contre prêter une attention particulière à la rédaction lorsqu'on utilise les fonctions ou les applications, et en particulier à ne pas commettre l'erreur beaucoup trop fréquente consistant à mélanger l'application f , et l'image $f(x)$ d'un élément par cette application.

1.1 Vocabulaire.

Comme on vient de le dire, le principe d'une application est le même que celui d'une fonction : faire correspondre à chaque élément x d'un ensemble E , un élément y d'un ensemble F , qu'on appellera **image** de x et qu'on notera $f(x)$.

Définition 1. Soient E et F deux ensembles. Un **graphe fonctionnel** du couple (E, F) est un sous-ensemble $\mathcal{G} \subset E \times F$ tel que $\forall x \in E, \forall (y, y') \in F^2, ((x, y) \in \mathcal{G} \text{ et } (x, y') \in \mathcal{G}) \Rightarrow y' = y$.

Cette définition peut paraître atrocement compliquée, mais elle correspond en fait bel et bien au graphe d'une fonction tel que vous avez l'habitude de le tracer pour des fonctions réelles. Il faut simplement considérer que les couples (x, y) appartenant au graphe \mathcal{G} correspondent à un couple image/antécédent pour une fonction. La condition technique qui est ajoutée assure simplement qu'un élément ne peut avoir qu'une seule image, ce qui correspond bien à la définition habituelle d'une fonction.

Définition 2. Si \mathcal{G} est un graphe fonctionnel du couple (E, F) , il définit une **application** $f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. L'ensemble $\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in \mathcal{G}\}$ est appelé **ensemble de définition** (ou domaine de définition) de l'application f . L'élément noté $f(x)$ est l'unique élément de F tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$, on l'appelle **image** de x par l'application f . Si $y \in F$, tous les éléments $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$ sont appelés **antécédents** de y par l'application f .

Exemples : Toutes les fonctions usuelles sont des applications. Ainsi, $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est une application dont le domaine de définition est \mathbb{R}^+ (si on converse la même formule mais qu'on modifie l'ensemble de définition, l'application n'est plus la même). Il existe aussi énormément d'applications définies sur toutes sortes d'ensembles mathématiques, ou même d'ensembles qui n'ont pas grand intérêt mathématique, comme $\begin{cases} E \rightarrow \llbracket 1, 15 \rrbracket \\ x \mapsto \text{groupe de colles de } x \end{cases}$ qui est une application définie sur l'ensemble E des élèves de la classe (la notation utilisée pour l'ensemble d'arrivée désigne les entiers compris entre 1 et 15, on pourrait mettre à la place un ensemble d'arrivée égal à \mathbb{N} , ça ne poserait pas de problème, l'ensemble d'arrivée n'a aucune raison d'être restreint à l'ensemble des valeurs effectivement prises par l'application).

Définition 3. Si E et F sont deux ensembles, la notation F^E désigne l'ensemble de toutes les applications de E dans F .

Remarque 1. Attention c'est bien l'ensemble de départ qui est en exposant, et l'ensemble d'arrivée à la base, dans cette notation. On peut par exemple noter (même si c'est assez peu employé) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies pour tout entier naturel.

Remarque 2. Il est essentiel de définir correctement vos applications (ou fonctions) sur vos copies. On ne parle pas par exemple de « la fonction $\ln(x)$ », mais de la fonction \ln , ou si on veut vraiment être plus précis, de la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$. De même, on n'écrit pas sur une copie : « Soit f la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$ » mais : « Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x + 2$ » ou encore : « Soit f la fonction $x \mapsto x^2 - x + 2$ » (quand le domaine de définition n'est pas explicite, il est sous-entendu qu'on le prend le plus grand possible). On fait ensuite bien attention à ne pas confondre une fonction avec un élément de l'ensemble d'arrivée, par exemple on dit bien : « f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ » mais jamais : « $f(x)$ est croissant sur $[0, 1]$ » (la quantité $f(x)$ étant un réel, ça n'aurait aucun sens).

Définition 4. Si E est un ensemble quelconque, l'**application identité** sur l'ensemble E est l'application $\begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$. On la note id_E , ou simplement id s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur l'ensemble E .

Définition 5. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications, la **composée** de g par f est l'application $g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$.

Remarque 3. Les applications identité jouent ce qu'on appelle un rôle d'**élément neutre** pour l'opération de composition : si $f : E \rightarrow F$, alors $f \circ \text{id}_E = f$ et $\text{id}_F \circ f = f$ (autrement dit, quand on compose par l'identité, il « ne se passe rien », le même rôle est joué par le nombre 0 pour l'opération d'addition, et par le nombre 1 pour celle de multiplication).

Proposition 1. La composition est une opération associative : si $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ sont trois applications, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

On notera donc ces composées successives sans utiliser de parenthèses (la propriété est complètement évidente). Notez bien que, par contre, la composition est une opération qui n'est pas du tout commutative : même quand les deux composées existent, on n'a pas en général $g \circ f = f \circ g$.

Définition 6. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et E' un sous-ensemble de E . L'application $g : \begin{cases} E' & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ est appelée **restriction** de f au sous-ensemble E' et notée $f|_{E'}$.

Réciproquement, si $E \subset G$, tout application $h : \begin{cases} H & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & h(x) \end{cases}$ telle que $h(x) = f(x)$ pour tout élément $x \in E$ est un **prolongement** de f à E (il existe énormément de prolongements possibles, mais la restriction est par construction unique).

Exemple : La fonction $x \rightarrow x \ln x$, définie sur \mathbb{R}^{+*} , peut se prolonger en une **unique** fonction \tilde{f} définie et continue sur \mathbb{R}^+ en posant $\tilde{f}(0) = 0$ (et bien sûr $\tilde{f}(x) = x \ln(x)$ si $x > 0$). Ce prolongement est appelé **prolongement par continuité** de f à \mathbb{R}^+ (c'est le fait d'imposer la conservation de la propriété de continuité qui rend ce prolongement unique et donc remarquable).

Définition 7. Soit $A \subset E$, la **fonction caractéristique** (ou **fonction indicatrice**) du sous-ensemble A est l'application $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

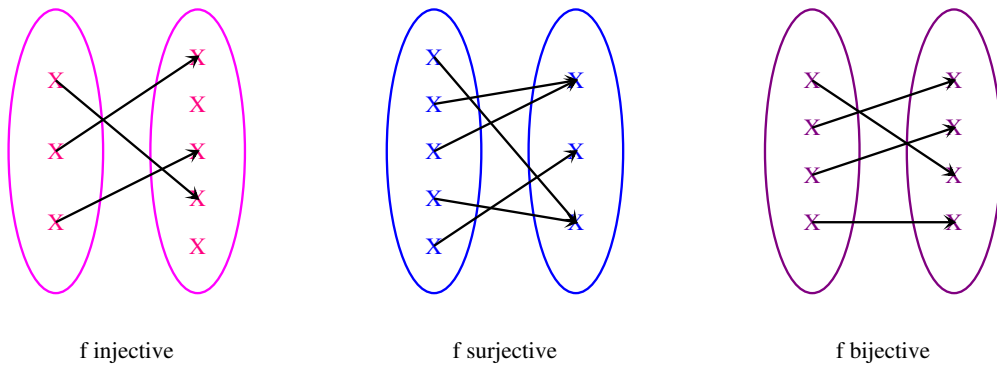
1.2 Injections, surjections, bijections.

Définition 8. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (ou, de façon équivalente, si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$).
- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- f est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque 4. Autrement dit, f est injective si tout élément de F a **au plus** un antécédent par f , surjective si tout élément de F a **au moins** un antécédent par f , et bijective si tout élément de F a **exactement** un antécédent par f .

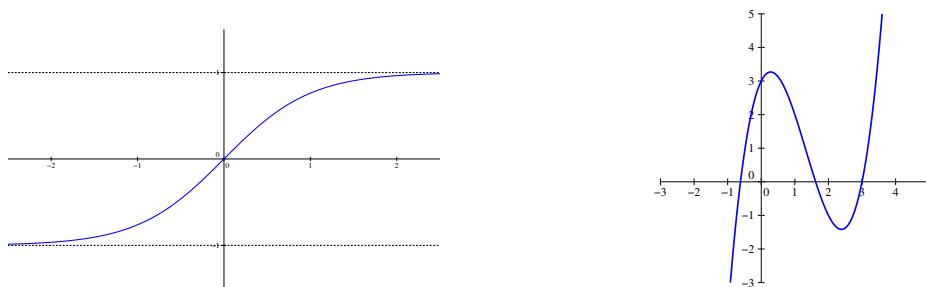
Exemples : L'application $x \mapsto x^2$, qui va de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , est surjective (tout réel positif admet une racine carrée) mais pas injective car par exemple 2 et -2 ont la même image par f . L'application racine carrée est par contre bijective de \mathbb{R}^+ dans lui-même.



L'application qui à tout élève de la classe associe son numéro de groupe de colles n'est pas injective (deux élèves différents appartenant au même trinôme auront la même image), elle est surjective si on limite l'ensemble d'arrivée à $\llbracket 1, 15 \rrbracket$, mais pas si l'ensemble d'arrivée est \mathbb{N} tout entier. De façon générale, on peut toujours rendre une application surjective en modifiant son ensemble d'arrivée. Pour la rendre injective, c'est beaucoup plus délicat car c'est dans ce cas l'ensemble de départ qu'il faut restreindre.

On notera que, si E et F sont deux ensembles finis, et f une application de E vers F , f ne peut être injective que si F contient au moins autant d'éléments que E (mais ce n'est bien sûr pas une condition suffisante!), et ne peut être surjective que si E contient au moins autant d'éléments que F . En particulier, s'il existe une bijection entre deux ensembles finis, alors ces ensembles ont nécessairement le même nombre d'éléments.

Pour ceux qui préfèrent des exemples avec des fonctions, un graphe de fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} injective mais pas surjective à gauche (on voit que les valeurs supérieures à 1 par exemple n'ont pas d'antécédent), et un de fonction surjective mais pas injective à droite (par exemple 0 a trois antécédents par cette fonction) :



Exemple : On souhaite prouver que la fonction $f : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$ est bijective. Pour cela, on peut bien sûr faire une étude de la fonction f pour connaître ses variations, mais on va privilégier ici une approche faisant intervenir les définitions que nous venons de voir, en prouvant séparément injectivité et surjectivité :

- Supposons $f(x) = f(x')$, avec $(x, x') \in [-1, 1]^2$. On en déduit que $2x(x'^2 + 1) = 2x'(x^2 + 1)$, donc $2xx'^2 + 2x - 2x'x^2 - 2x' = 0$, soit encore $2(x' - x)(xx' - 1) = 0$. Or, on a supposé $(x, x') \in [-1, 1]^2$, donc l'égalité $xx' = 1$ ne peut être vérifiée que si $x = x' = \pm 1$. Dans tous les cas, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, et l'application f est donc injective.

- Prenons désormais $y \in [-1, 1]$, et cherchons un x tel que $y = f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. On doit donc avoir $x^2y - 2x + y = 0$. Si $y = 0$, l'équation admet manifestement comme unique solution $x = 0$, donc 0 admet un antécédent par f dans $[-1, 1]$. Si $y \neq 0$, on est en présence d'une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0$ (rappelons que $y \in [-1, 1]$). Cette équation admet donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{1 - y^2}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$, et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$. Reste à prouver qu'une de ces deux racines appartient bien à l'intervalle $[-1, 1]$. Pour cela, supposons $0 < y \leq 1$ et montrons que $0 \leq x_2 \leq 1$ (si $-1 \leq y < 0$, seul le signe de x_2 change). On a déjà $\sqrt{1 - y^2} \in [0, 1]$, donc $x_2 \geq 0$. De plus, $x_2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - y^2} \leq y \Leftrightarrow 1 - y \leq \sqrt{1 - y^2}$. On peut tout élever au carré car nos deux membres sont positifs, l'inégalité est donc équivalente à $1 - 2y + y^2 \leq 1 - y^2$, ou encore $2y^2 - 2y \leq 0$, ce qui est bien le cas si $y \in]0, 1]$. On a donc péniblement prouvé la surjectivité de f .

Proposition 2. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (mais g ne l'est pas forcément).
- si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (mais f ne l'est pas forcément).
- si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration. Toutes ces démonstrations sont formelles mais assez faciles, les refaire (sans consulter le cours) est une bonne façon de vérifier que vous comprenez bien les notions manipulées.

- Supposons g et f injectives. Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g , on a alors nécessairement $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f , $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$.
- Le plus simple ici est de procéder par contraposée : si on suppose que f n'est **pas** injective, on peut trouver deux éléments distincts x et x' dans l'ensemble E tels que $f(x) = f(x')$. Mais on aura alors également $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, ce qui prouve que $g \circ f$ n'est pas non plus injective.
- Supposons désormais g et f surjectives. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g , $\exists y \in F$, $z = g(y)$, puis par surjectivité de f , $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Mais alors $z = g \circ f(x)$, donc z a un antécédent par $g \circ f$, ce qui prouve la surjectivité de cette application.
- Supposons cette fois $g \circ f$ surjective. Tout élément $z \in G$ admet donc un antécédent $x \in E$ par l'application $g \circ f$. En notant alors $y = f(x)$, on aura $g(y) = g \circ f(x) = z$, ce qui prouve que z admet également un antécédent par g , et donc que g est surjective.
- C'est évident en utilisant la propriété similaire pour l'injectivité et la surjectivité. □

Remarque 5. La dernière de ces propriétés n'admet aucune réciproque (autre que « f est injective et g est surjective », en particulier aucune des deux applications n'est nécessairement bijective), comme le prouve l'exercice suivant :

- on définit une première application $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$.
- et une deuxième application $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) \end{cases}$.

Le but de l'exercice est d'étudier l'injectivité et la surjectivité des quatre applications f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$.

- l'application f est certainement injective (si $2n = 2n'$, alors $n = n'$) mais pas surjective (par exemple 3 n'a pas d'antécédent entier par cette application).
- au contraire, l'application g n'est pas injective (on a par exemple $g(3) = g(2) = 1$), mais elle est bien surjective : quel que soit l'entier naturel p , l'entier $2p$ est un antécédent de p par g de façon évidente.
- il est assez facile de comprendre que $f \circ g$ ne peut être ni injective (3 ne peut pas avoir d'antécédent entier par $f \circ g$ puisque $g(n)$ est toujours un entier, dont le double ne peut donc pas être égal à 3), ni surjective (comme pour g , on a $f \circ g(2) = f \circ g(3)$). C'est en fait une conséquence des propriétés énoncées ci-dessus.
- au contraire, $g \circ f$ est bijective, puisqu'on a tout bêtement $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Proposition 3. Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. L'application g est alors appelée **bijection réciproque** de f (ou réciproque tout court) et notée f^{-1} .

Remarque 6. Cette réciproque, bien que notée f^{-1} , n'a rien à voir avec la fonction inverse de f , que pour cette raison nous noterons toujours $\frac{1}{f}$. Notons au passage que f^{-1} est effectivement bijective, de réciproque f (c'est évident une fois le théorème démontré).

Démonstration. Supposons f bijective. Soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f , on pose simplement $g(y) = x$. On a alors par construction $f \circ g(x) = x$, donc $f \circ g = \text{id}_F$. De plus, si $x \in E$, $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$, mais comme il n'y en qu'un ça ne peut être que x , donc on a aussi $g \circ f = \text{id}_E$.

Réciproquement, si $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, considérons x et x' tels que $f(x) = f(x')$, on a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f . Soit maintenant $y \in F$, alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = y$, donc f est surjective. L'application f est donc bijective. □

Proposition 4. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. La bijectivité a déjà été signalée plus haut. De plus, $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1}((g^{-1} \circ g)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$ et de même $\forall x \in G$, $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = x$. □

1.3 Images directes et réciproques.

Définition 9. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** (directe) de A l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.

Soit maintenant $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par F l'ensemble des antécédents d'éléments de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Remarque 7. La deuxième notation n'a pas été choisie de façon contradictoire avec la définition d'application réciproque (encore heureux). Si f est bijective, l'image réciproque d'une partie B de F est confondue avec son image directe par f^{-1} .

Exemple : Considérons l'application $f : x \mapsto x^2$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors $f([2, 5]) = [4, 25]$; $f([-1, 3]) = [0, 9]$; $f^{-1}([4, 9]) = [-3, -2] \cup [2, 3]$.

2 Relations binaires.

2.1 Généralités.

Définition 10. Une **relation binaire** \mathcal{R} sur un ensemble E est un sous-ensemble de $E \times E$.

Cette définition ressemble étrangement à celle d'une application, mais ici, il ne s'agit pas ici d'associer un élément d'un ensemble F à tout élément d'un ensemble E , mais de relier entre eux différents éléments d'un même ensemble. La notation ne sera pas la même : on notera $x\mathcal{R}y$ si deux éléments x et y de l'ensemble E sont **en relation**, c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Attention toutefois, l'ordre des variables est important, x peut être en relation avec y sans que y soit en relation avec x .

Exemples : Vous connaissez en fait déjà énormément de relations, la plupart étant matérialisées par des symboles plus « concrets » que le \mathcal{R} utilisé dans la définition. Ainsi, l'égalité (matérialisée par le symbole $=$), l'inégalité (matérialisée par $<$ ou \leq) sont des relations sur l'ensemble \mathbb{R} . Plus intéressant, le parallélisme (matérialisé par le symbole \parallel) est une relation sur l'ensemble de toutes les droites du plan (ou de l'espace).

Définition 11. Une relation binaire sur un ensemble E est :

- **réflexive** si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$.
- **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- **totale** si $\forall (x, y) \in E^2$, on a soit $x\mathcal{R}y$, soit $y\mathcal{R}x$.

Par exemple, la relation de parallélisme sur les droites du plan est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), symétrique et transitive, mais pas antisymétrique ni totale (certaines de ces propriétés sont de toute façon manifestement incompatibles entre elles).

2.2 Relations d'équivalence.

Définition 12. Une **relation d'équivalence** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple : La relation d'équivalence la plus simple possible sur un ensemble quelconque E est la relation d'égalité. Plus généralement, toute relation faisant intervenir une égalité sera une relation d'équivalence (par exemple, la relation \mathcal{R} définie sur l'ensemble des français par « deux individus sont en relation s'ils ont la même taille » est une relation d'équivalence). Le but d'une relation est en fait de séparer les éléments d'un ensemble en catégories d'éléments « similaires » (ceux qui sont en relation). Quelques exemples moins triviaux :

- la relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R} (qui consiste à identifier les réels correspondant au même point sur le cercle trigonométrique).
- la relation de parallélisme sur l'ensemble de toutes les droites du plan déjà citée.

Définition 13. Soit $x \in E$ et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E , la **classe d'équivalence** de x pour la relation \mathcal{R} est l'ensemble $C_x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$.

Proposition 5. Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E , l'ensemble de ses classes d'équivalence forme une partition de l'ensemble E .

Démonstration. En effet, supposons que deux classes C_x et C_y ne soient pas disjointes, il existe donc un z tel que $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$, ce qui implique par transitivité que $x\mathcal{R}y$. Les classes d'équivalence de x et de y sont alors les mêmes. Par ailleurs, tout élément de E appartient certainement à une classe d'équivalence : la sienne ! \square

Exemples : Pour la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan, la classe d'équivalence d'une droite donnée est constituée de toutes les droites du plan qui lui sont parallèles. On l'appelle **direction** de la droite.

Pour la relation d'égalité (sur n'importe quel ensemble E), les classes d'équivalence sont toutes réduites à un seul élément, ce qui prouve l'inintérêt total de cette relation. À l'inverse, si on définit une relation pour laquelle deux éléments de l'ensemble sont toujours en relation, il s'agira d'une relation d'équivalence tout aussi idiote, pour laquelle on aura une seule classe d'équivalence égale à l'ensemble tout entier.

La relation définie sur \mathbb{C} par $x\mathcal{R}y$ si $|x| = |y|$ est une relation d'équivalence, et ses classes d'équivalence sont, dans le plan complexe, tous les cercles concentriques centrés en l'origine du repère.

2.3 Relations d'ordre.

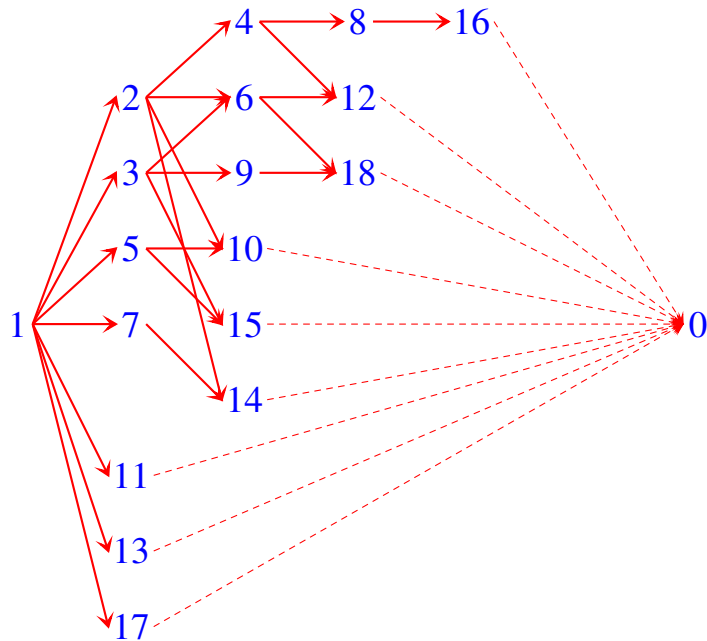
Les relations d'ordre sont un autre type particulier de relations qui, comme leur nom l'indique, ont pour but d'ordonner les éléments de l'ensemble, et non plus de les ranger par catégorie. Il suffit de changer une propriété par rapport aux relations d'équivalence pour obtenir cette nouvelle signification :

Définition 14. Une **relation d'ordre** \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

On interprètera dans ce cas la relation $x\mathcal{R}y$ comme « x est plus petit que y » (ou plus grand, les propriétés seraient les mêmes).

Exemples : L'exemple le plus évident de relation d'ordre est la relation \leq dans \mathbb{R} . Notons que la relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive. De plus, la relation \leq est une relation d'ordre **totale**, ce qui a une conséquence très forte : on peut représenter l'ensemble des réels de façon « ordonnée » comme points d'une droite, un réel situé à gauche d'un autre étant plus petit que ce dernier. On pourra avoir le même type de représentation pour n'importe quel ensemble muni d'une relation d'ordre, à condition que celle-ci soit totale.

Un exemple beaucoup plus complexe est la relation de divisibilité sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels non nuls. On dit qu'un entier p divise un autre entier q , et on note $p \mid q$, si $\exists k \in \mathbb{N}, q = kp$. Il n'est pas très difficile de vérifier que cette relation est bien une relation d'ordre : tout entier se divise lui-même, et un entier qui en divise un autre est nécessairement plus petit que ce dernier (sauf dans le cas particulier où ce dernier est égal à 0, mais 0 ne divisant personne, il ne pose pas de problème pour l'antisymétrie), donc $p \mid q$ et $q \mid p$ implique que $p \leq q$ et $q \leq p$, donc $q = p$. Enfin si $p \mid q$ et $q \mid r$ alors $q = kp$ et $r = k'q$, avec $(k, k') \in \mathbb{N}^2$, donc $r = kk'p$, ce qui prouve que p divise r . Par contre, cette relation d'ordre n'est pas totale, puisque par exemple 2 et 3 ne sont pas comparables. Si on essaye de placer tous les entiers sur un schéma illustrant cette relation d'ordre, on va obtenir quelque chose d'affreusement plus compliqué que la droite bien ordonnée des nombres réels (chaque flèche représente une paire d'entiers reliés par la relation de divisibilité) :



Définition 15. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre \mathcal{R} , et A un sous-ensemble de E .

- L'élément $M \in E$ est un **majorant de A** (ou A est **majorée par M**) si $\forall x \in A, x \leq M$.
- L'élément m est un **minorant de A** (ou A est **minorée par m**) si $\forall x \in A, m \leq x$.
- L'ensemble A admet un **maximum** s'il existe un élément de A qui majore A . Un tel élément est alors noté $\max(A)$.
- L'ensemble A admet un **minimum** s'il existe un élément de A qui minore A . Un tel élément est alors noté $\min(A)$.
- L'ensemble A est **borné** s'il admet à la fois (au moins) un majorant et un minorant.

Exemple : Si on reprend la relation de divisibilité sur \mathbb{N} , le sous-ensemble $A = \{6, 12, 24, 36\}$ est minoré par 3 par 2 (ou même pas 1 ou par 6, qui est aussi un minorant de l'ensemble. Ce même ensemble est majoré par 96, mais n'admet pas de maximum (s'il y avait un maximum ce serait nécessairement 36, qui n'est pas divisible par 24). Remarquons que, pour cette relation, l'ensemble \mathbb{N} tout entier admet à la fois un minimum (égal à 1) et un maximum (égal à 0).

Remarque 8. Quand un sous-ensemble est minoré (ou majoré), il admet presque toujours plusieurs majorants. Par contre, s'il y a un minimum (ou un maximum), il est unique. En effet, si on suppose que deux éléments m et m' sont simultanément des minima de A , on aura à la fois $m \mathcal{R} m'$ (puisque m minore A et $m' \in A$) et symétriquement $m' \mathcal{R} m$. L'antisymétrie d'une relation d'ordre impose alors que $m = m'$.

3 Méthodes de calcul sur les nombres réels.

3.1 Ordre et inégalités dans \mathbb{R} .

Définition 16. L'ordre naturel sur l'ensemble \mathbb{R} est l'ordre donné par la relation d'ordre \leq .

Remarque 9. Le fait que \leq est bien une relation d'ordre est « évident » si on accepte que notre vision intuitive de l'ensemble \mathbb{R} est mathématiquement correcte. En réalité, construire rigoureusement

l'ensemble des réels est une tâche loin d'être aisée, que nous n'entreprendrons d'ailleurs pas cette année.

Définition 17. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ admet une **borne supérieure** s'il est majoré et si l'ensemble de ses majorants admet un minimum. Ce minimum est alors appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.

La **borne inférieure** de l'ensemble A est définie symétriquement comme le maximum de l'ensemble de ses minorants, s'il existe.

Exemple : L'intervalle $[2, 4[$ admet pour borne inférieure 2 (qui est également le minimum de cet intervalle) et pour borne supérieure 4 (mais il n'admet pas de maximum). L'intervalle $[2, +\infty[$ n'est pas majoré, et n'a donc pas non plus de maximum ni de borne supérieure.

Remarque 10. Si l'ensemble A admet un minimum (respectivement un maximum), alors il admet une borne inférieure (resp. supérieure) égale à ce minimum (resp. maximum).

Théorème 1. Caractérisation de la borne supérieure.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$, alors $M = \sup(A)$ si et seulement si :

- M est un majorant de A .
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$.

On dispose bien sûr d'une caractérisation symétrique de la borne inférieure.

Démonstration. Supposons pour commencer que $M = \sup(A)$, alors M majore A par définition de la borne supérieure. On procède ensuite par contraposée : si la deuxième proposition de notre caractérisation n'est pas vérifiée, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ pour lequel $x \leq M - \varepsilon$ pour tout élément x appartenant à A . Autrement dit, $M - \varepsilon$ serait un majorant de A , et M ne serait donc pas le plus petit majorant de A , ce qui prouve que $M \neq \sup(A)$.

La réciproque est très similaire : si on suppose nos deux propriétés vérifiées et qu'on suppose de plus que M n'est **pas** borne supérieure de A , il existe donc un majorant M' de A strictement inférieur à M . En notant $\varepsilon = M - M'$, on ne peut alors trouver aucun élément x dans A vérifiant $M - \varepsilon < x$, puisque cela signifierait que $M' < x$, alors que M' est un majorant de A . \square

Théorème 2. Tout sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Tout sous-ensemble non vide et minoré de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Cette propriété est en fait une caractéristique absolument fondamentale de l'ensemble \mathbb{R} , qui le distingue par exemple de \mathbb{Q} . Encore un théorème que nous ne pourrons pas démontrer faute de construction claire de l'ensemble \mathbb{R} .

Proposition 6. Règles de calcul sur les inégalités dans \mathbb{R} .

- On peut ajouter ou soustraire une même constante à tous les membres d'une inégalité ou d'un encadrement.

Exemple : si $1 \leq x \leq 3$, on aura $-2 \leq x - 3 \leq 0$.

- On peut multiplier ou diviser une inégalité par une constante, en changeant le sens des inégalités si cette constante est négative.

Exemple : si $1 \leq x \leq 3$, alors $-6 \leq -2x \leq -2$.

- On peut additionner membre à membre des inégalités ou des encadrements.

Exemple : si $1 \leq x \leq 3$ et $2 \leq y \leq 5$, alors $3 \leq x + y \leq 8$.

- On ne peut pas soustraire deux inégalités membre à membre.

Exemple : en reprenant l'exemple précédent, si on souhaite encadrer $x - y$, on commence par encadrer $-y$ sous la forme $-5 \leq -y \leq -2$, puis on additionne les encadrements de x et de $-y$ pour obtenir $-4 \leq x - y \leq 1$.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités seulement si leurs membres sont tous positifs. Dans le cas contraire, il convient de prendre soin de réfléchir aux bornes obtenues.

Exemple : ainsi, toujours avec les mêmes encadrements pour x et y , on obtient $2 \leq xy \leq 15$.

- On peut inverser une inégalité à condition que tous ses membres soient de même signe (positifs ou négatifs, peu importe), en changeant le sens des inégalités.

Exemple : cela découle de la décroissance de la fonction inverse sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$. Ici, on aura $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.

- Pour diviser deux inégalités, tout comme pour la soustraction, on commence par encadrer un inverse avant de tenter une multiplication.

Exemple : ainsi, on aura ici $\frac{2}{3} \leq \frac{y}{x} \leq 5$.

- On peut appliquer à une inégalité toute fonction croissante sans en changer le sens, et toute fonction décroissante en changeant le sens. Par exemple, quand cela a un sens, on peut mettre des racines carrées sur tous les membres d'une inégalité sans problème.

Exemple : résolution d'inéquation à l'aide d'un tableau de signes. On souhaite résoudre l'inéquation $\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \geq 2$. pour cela, on ne multiplie surtout pas les deux membres par $x + 2$, car son signe dépend de x . À la place, on fait tout passer à gauche et on met au même dénominateur, pour obtenir l'inéquation $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \geq 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet donc pour racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x		-2		3	
$x^2 - x - 6$	+	0	-	0	+
$x + 2$	-	0	+		+
$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$	-		-	0	+

Il ne reste plus qu'à conclure : $\mathcal{S} = [3, +\infty[$.

Exemple 2 : On souhaite résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^x + 2e^{-x} \leq 3$. La bonne méthode ici est de procéder au changement de variable $X = e^x$ pour transformer l'inégalité en $X + \frac{2}{X} \leq 3$, soit $X^2 - 3X + 2 \leq 0$ (on peut tout multiplier par X sans se soucier du fait qu'il y ait une inégalité puisque par construction $X \geq 0$). Le trinôme du membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et admet pour racines $X_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Le trinôme est donc négatif lorsque $X \in [1, 2]$, c'est-à-dire lorsque $x \in [0, \ln(2)]$. Il ne reste plus qu'à conclure : $\mathcal{S} = [0, \ln(2)]$.

3.2 Identités remarquables et polynômes.

Proposition 7. Identités remarquables. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, alors :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Remarque 11. La troisième identité remarquable est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir des **quantités conjuguées**. La quantité conjuguée d'une somme $A + B$ est simplement la différence $A - B$. Le fait de multiplier numérateur et dénominateur d'une fraction par une quantité conjuguée permet par exemple de faire disparaître les racines carrées se trouvant au dénominateur. Ainsi, $\frac{2 - \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{6 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4}{9 - 8} = 2 + \sqrt{2}$.

Définition 18. Un **polynôme** à coefficients réels est une expression de la forme $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, n étant un entier naturel appelé **degré** du polynôme et a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels appelés **coefficients** du polynôme.

Proposition 8. Résolution des équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

En notant $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation, on a les cas suivants :

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $x = \frac{-b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Proposition 9. Tableau de signe d'un polynôme du second degré.

Dans le cas où le polynôme admet deux racines réelles, le tableau de signe ressemble à ceci :

x	x_1	x_2
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de a

Si le discriminant du trinôme est négatif ou nul, le polynôme est toujours du signe de a , et s'annule uniquement en $-\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$.

Remarque 12. Lorsqu'on effectue le tableau de signe d'un polynôme, quel que soit son degré, le signe se trouvant à droite de la dernière racine est toujours celui de a (coefficient du terme de plus haut degré).

Proposition 10. Si un polynôme s'annule en $x = a$, alors on peut le factoriser par $(x - a)$ (et le deuxième facteur sera un polynôme de degré un de moins que le polynôme initial).

Exemple : On utilise ce principe pour résoudre notamment des équations du troisième degré quand on arrive à en trouver une racine dite « évidente » (il existe des méthodes générales pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, mais elles ne sont pas au programme et nécessitent de toute façon des connaissances sur les nombres complexes).

Prenons l'équation $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ (on veut la résoudre uniquement dans \mathbb{R}), qui a pour racine évidente 2 (puisque $2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$). On peut donc effectuer une factorisation sous la forme $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$. Pour déterminer les coefficients a , b et c et pouvoir finir la résolution, nous utiliserons le principe suivant :

Proposition 11. Principe d'identification des coefficients.
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ici, en développant le membre de droite, on obtient $x^3 - x^2 - x - 2 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$, dont on déduit, en regardant coefficient par coefficient, les égalités $a = 1$, $b - 2a = -1$, $c - 2b = -1$ et $-2c = -2$, d'où $a = b = c = 1$ (le système a une solution unique). On a donc $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$. Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, il n'a pas de racine réelle, et $x = 2$ est donc l'unique solution de l'équation initiale.

Une autre technique est possible pour déterminer la factorisation, celle de la division euclidienne. Le principe est exactement le même que celui de la division euclidienne sur les entiers, que vous avez apprise au primaire. Ici, on peut présenter le calcul de la façon suivante :

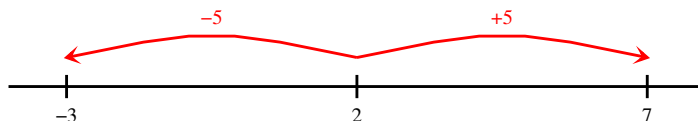
$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - X^2 - X - 2 & X - 2 \\
 - (X^3 - 2X^2) & \\
 \hline
 X^2 - X - 2 & \\
 - (X^2 - 2X) & \\
 \hline
 X - 2 & \\
 - (X - 2) & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 & X^2 + X + 1
 \end{array}$$

Conclusion : $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$. La fin de la résolution se fait comme ci-dessus.

3.3 Valeurs absolues.

Définition 19. La **valeur absolue** d'un réel x est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels x et y , $|x - y|$ représente la distance entre x et y .

Exemple : Pour résoudre l'équation $|x - 2| = 5$, on peut la traduire sous la forme « La distance entre x et 2 est égale à 5 ». Il existe alors deux possibilités pour x : soit x est à distance 5 à droite de 2, autrement dit $x = 2 + 5 = 7$, soit x est à distance 5 à gauche de 2, autrement dit $x = 2 - 5 = -3$.



Autre méthode de résolution par le calcul pur : les deux nombres ayant pour valeur absolue 5 sont 5 et -5 , donc on a $x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5$, ce qui donne évidemment les deux mêmes solutions que ce-dessus.

Exemple : Pour résoudre l'inéquation $|x - 1| \geq 3$, les deux mêmes méthodes sont disponibles. En revenant à la notion de distance, on veut que la distance de x à 1 soit au moins égale à 3, ce qui donne deux zones de solutions possibles, l'une à gauche de -2 , l'autre à droite de 4. Autrement dit, $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.

Par le calcul, il faut faire attention à bien écrire les deux inégalités possibles : $x - 1 \geq 3$ ou $x - 1 \leq -3$, ce qui donne là-aussi les mêmes solutions.

Proposition 12. Deux nombres réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

Exemple : Pour résoudre une équation du type $|x^2 - 4x + 5| = |x - 1|$, il suffit de considérer les deux équations $x^2 - 4x + 5 = x - 1$ et $x^2 - 4x + 5 = 1 - x$ et de les résoudre séparément. La première équation $x^2 - 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet donc deux racines $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. La deuxième équation $x^2 - 3x + 4$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 16 = -7$ et n'admet donc pas de solutions. Finalement, l'équation initiale a donc pour solutions 2 et 3.

Proposition 13. Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :

- $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$

Exemple : Certaines équations faisant intervenir « trop » de valeurs absolues et ne pouvant être résolues par les méthodes déjà décrites nécessiteront l'emploi d'une technique proche du tableau

de signes, qui consiste, comme pour un vrai tableau de signes, à distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de x , et à essayer d'exprimer l'équation sans valeur absolue dans chacun de ces cas. Considérons par exemple l'équation $|x + 2| + |2x - 1| + |x - 3| = 8$. Nous pouvons faire le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x - 1 $	$1 - 2x$	$1 - 2x$	0	$2x - 1$	$2x - 1$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
$ x + 2 + 2x - 1 + x - 3 $	$2 - 4x$	$6 - 2x$	$2x + 4$	$4x - 2$	

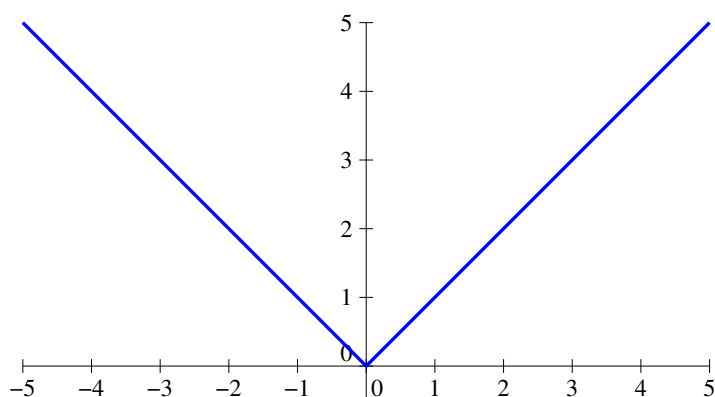
Il reste ensuite à résoudre l'équation sur chaque intervalle (donc à résoudre quatre équations), et surtout à vérifier si chacune des solutions obtenues appartient au bon intervalle. Ici,

- sur $] -\infty; -2]$, $2 - 4x = 8$ donne $x = -\frac{3}{2}$, solution non valable car strictement supérieure à -2 .
- sur $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$, $6 - 2x = 8$ donne $x = -1$, solution valable.
- sur $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$, $2x + 4 = 8$ donne $x = 2$, solution valable.
- sur $[3; +\infty[$, $4x - 2 = 8$ donne $x = \frac{5}{2}$, solution non valable.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$.

Définition 20. La fonction **valeur absolue** est notée $x \mapsto |x|$. Elle est définie sur \mathbb{R} par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. La fonction valeur absolue est paire.

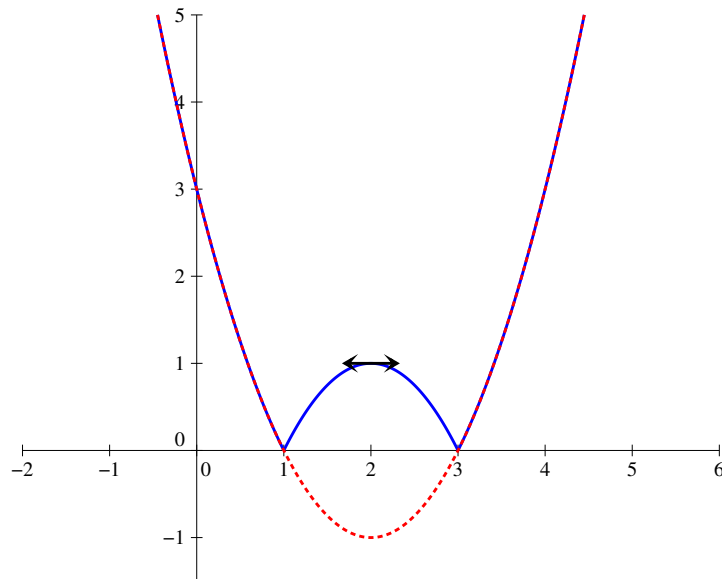
Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



Exemple : On veut étudier la fonction g définie par l'équation $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Le plus simple est de commencer par ne pas se préoccuper des valeurs absolues et étudier la fonction $h : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. On étudiera les variations **et le signe** de h pour déduire les variations de g . En effet, l'ajout de la valeur absolue est assez simple à gérer : sur les intervalles où h sera positive, elle ne change rien ; et sur ceux où h est négative, son signe et ses variations seront opposées (graphiquement, on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses des morceaux de la courbe de h situés en-dessous de cet axe). On peut faire le gros tableau suivant (je vous épargne le calcul de h' et celui des solutions de l'équation $h(x) = 0$) :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
h	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$
g	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Et voici les deux courbes, en bleu celle de g et en rouge pointillés celle de h :



Remarque 13. Dans le cas d'une étude de fonction où la valeur absolue n'englobe pas l'expression entière de $f(x)$ comme dans le cas précédent, le plus simple et prudent est d'exprimer f sans utiliser de valeur absolue, en distinguant plusieurs intervalles, et de faire une étude séparée sur chaque intervalle (en dérivant donc plusieurs expressions différentes si besoin).