# TD n$^{\text{o}}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

5 septembre 2023

## Exercice 1 (12 points)

1. (a) On calcule donc $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - nx + 2) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx + 2 = \dfrac{2}{1+e^x}$. Plus de forme indéterminée, on obtient directement $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - nx + 2 = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = nx - 2$ (attention au signe de l'ordonnée à l'origine) est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$.

   (b) De l'autre côté, on a plus simplement $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2e^x}{1+e^x} = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) - nx = 0$. Cette fois-ci, c'est la droite d'équation $y = nx$ qui est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ en $-\infty$.

2. (a) Comme son dénominateur ne s'annule jamais, $f_n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{-2e^x(1+e^x) + 2e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} + n = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$.

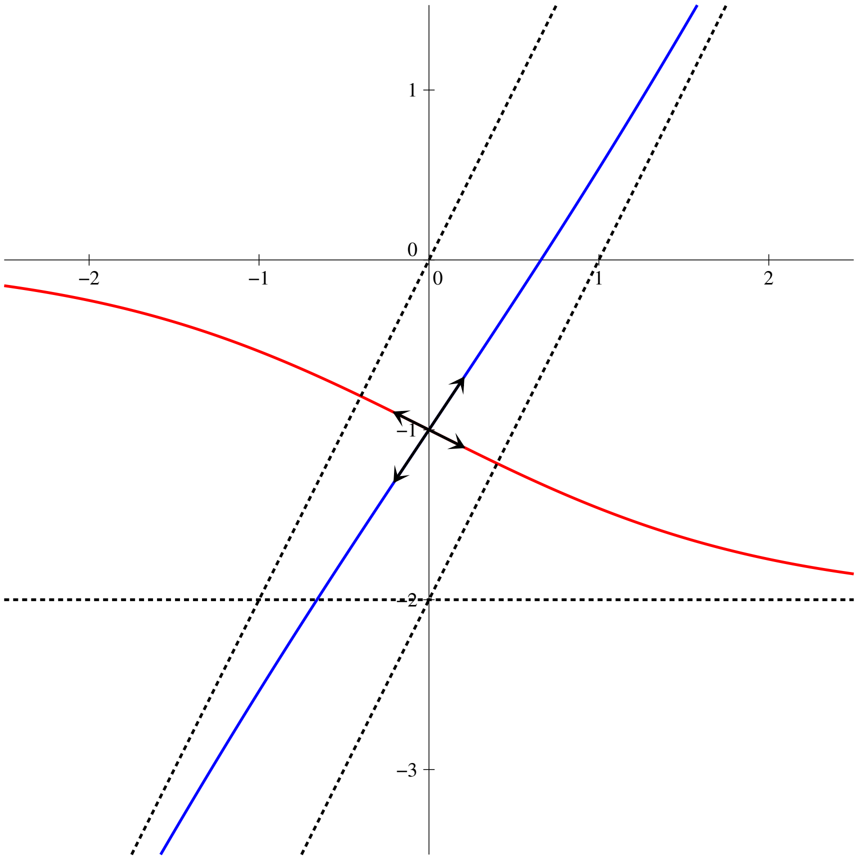
   (b) Tout étant positif, l'inégalité demandée est équivalente à $4e^x \leqslant (1+e^x)^2$, soit $4e^x \leqslant 1+2e^x+e^{2x}$, ou encore $e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0$. On reconnaît dans le membre de gauche une identité remarquable : $(e^x - 1)^2$ est toujours positif, ce prouve le résultat demandé.

   (c) On déduit de l'inégalité démontrée à la question précédente que $\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ (il suffit de tout multiplier par $-\dfrac{1}{2}$ en pensant évidemment à changer le sens de l'inégalité). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on aura donc $\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n \geqslant n - \dfrac{1}{2} > 0$, ce qui prouve que $f_n$ sera strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $n = 0$, c'est encore plus simple, $\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$ donc la fonction $f_0$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On calcule $f_n(0) = \dfrac{-2}{1+1} + 0 = -1$, et $f_n'(0) = \dfrac{-2}{(1+1)^2} + n = n - \dfrac{1}{2}$. La tangente a donc pour équation $y = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)x - 1$.

   (b) La fonction $f_n$ est dérivable une deuxième fois, et $f_n''(x) = \dfrac{-2e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \times 2(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{4e^x - 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^3} = \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Cette dérivée seonde est du signe de $1 - e^x$ (tous les autres facteurs sont positifs) donc elle s'annule effectivement en changeant de signe en 0, et nulle part ailleurs.

4. Le calcul des asymptotes effectué plus haut donne la valeur des limites pour nos deux fonctions (limites finies égales à 0 et $-2$ pour $f_0$). On infique bien sûr sur nos courbes ces asymptotes, ainsi que les tangentes calculées à la question précédente. La courbe rouge est celle de $f_0$, la courbe bleue celle de $f_2$ :




5. (a) Il s'agit en fait de calculer l'intégrale $A(t) = \int_0^t f_n(x) - (nx - 2)\, dx = \int_0^t \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2\, dx$ (il est ici nettement préférable de ne pas mettre au même dénominateur comme on l'avait fait pour le calcul de limite de la première question). Au facteur $-2$ près situé au numérateur, on reconnaît dans le premier morceau un quotient de la forme $\frac{u'}{u}$, donc $A(t) = [-2\ln(1+e^x) + 2x]_0^t = -2\ln(1+e^x) + 2x + 2\ln(2)$.

   (b) Le plus simple est de faire apparaître un ln là où il n'y en a pas pour pouvoir simplifier : $2x = 2\ln(e^x)$, donc $A(t) = -2\ln(1+e^x) + 2\ln(e^x) + 2\ln(2) = 2\ln(2) - 2\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = 2\ln(2) - 2\ln(1+e^{-x})$. Plus de forme indéterminée sous cette forme, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 2\ln(2)$.

## Partie II

1. (a) La fonction $f_0$ est strictement décroissante, donc la fonction $g : x \mapsto f_0(x) - x$ l'est également (pour ceux pour qui ça ne semble pas évident, sa dérivée sera égale à $f_0'(x) - 1$, qui est certainement négatif si $f_0'(x)$ l'est déjà). De plus, $g$ est continue et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (cela découle immédiatement des limites finies calculées pour $f_0$). La fonction $g$ est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier 0 admet un unique antécédent par $g$. Il existe donc un unique réel vérifiant $f_0(x) - x = 0$, ou $f_0(x) = x$.

   (b) On a déjà vu dans la première partie que $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \leqslant 0$, donc l'inégalité demandée découle immédiatement.

2. (a) Il suffit d'appliquer l'inégalité admise en posant $z = u_n$ et $y = u_n$. Comme $f_0(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), et $f_0(\alpha) = \alpha$ (c'est également sa définition !), cela donne effectivement $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

   (b) On va démontrer cette nouvelle inégalité par récurrence. Pour $n = 0$, elle est évidente puisqu'elle affirme que $|0 - \alpha| \leqslant |\alpha|$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée au rang $n$, alors, en exploitant l'inégalité de la question précédente puis l'hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|\alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|\alpha|$, ce qui est exactement la formule souhaitée au rang $n+1$. La propriété est initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n$.

(c) Une valeur absolue étant toujours positive, $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|\alpha|$. Comme le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 (suite géométrique), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

## Partie III

1. (a) C'est une conséquence immédiate du fait que $f_n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ (donc a fortiori si $n \geqslant 2$).

   (b) On sait que $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{-2e}{1+e} + n > 0$ en exploitant la donnée de l'énoncé. La fonction $f_n$ est donc continue et change de signe sur l'intervalle $[0, 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc sur l'intervalle $]0, 1[$. Comme $x_n$ est l'abscisse de l'unique point d'annulation de $f_n$, on a donc bien $0 < x_n < 1$.

2. (a) Par définition, $f_n(x_n) = 0$. Or, $f_{n+1}(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + (n+1)x = f_n(x) + x$. On en déduit que $f_{n+1}(x_n) = x_n > 0$.

   (b) Toujours par définition, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Le résultat de la question précédente prouve donc que $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme la fonction $f_{n+1}$ est strictement croissante, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$, ce qui signifie bien que la suite $(x_n)$ est strictement décroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc (théorème de convergence monotone).

3. (a) Par définition, $f_n(x_n) = 0$, donc $\frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n = 0$. Autrement dit, $nx_n = -f_0(x_n)$. Or, la fonction $f_0$ est strictement décroissante, et on a déjà prouvé que $0 < x_n < 1$. On peut donc affirmer que $f_0(1) < f_0(x_n) < f_0(0)$, soit $-\frac{2e}{1+e} < f_0(x_n) < -1$. En dédoucle l'encadrement $1 < nx_n < \frac{2e}{1+e}$, puis celui demandé en divisant simplement tout par $n$.

   (b) Le théorème des gendarmes permet directement de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. La continuité de la fonction $f_0$ entraîne alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_0(x_n) = f_0(0) = -1$. Le fait que $nx_n = -f_0(x_n)$ donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = 1$.

4. (a) C'est évident puisque la suite est décroissante.

   (b) On déduit du résultat précédent que $(x_n)^n \leqslant (x_2)^n$. Or, $x_2 \in ]0, 1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_2^n = 0$. Comme par ailleurs $x_n^n$ est évidemment strictement positif, une dernière application du théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$.

# Exercice 2

1. (a) Il manquait bien sûr un $z$ derrière le coefficient $(a + b + c)$ dans l'énoncé. On peut calculer un discriminant pour résoudre des équations du second degré même quand les coefficients sont complexes, mais comme ça ne doit pas (encore) faire partie de vos habitudes, contentons-nous plutôt de remarquer qu'il y a deux solutions évidentes à cette équation : $z = c$ convient, et $z = a + b$ également. En fait, l'équation peut se factoriser sous la forme $(z - c)(z - a - b) = 0$, et les deux solutions évidentes sont les seules.

   (b) Une astuce classique pour calculer la forme exponentielle d'une somme (ou d'une différence) de deux exponentielles complexes est la factorisation par l'angle moitié. Ici, $a + b = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{6\pi}{12}} + e^{i\frac{4\pi}{12}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}})$. On peut maintenant exploiter les formules d'Euler pour simplifier la parenthèse : $e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, qui est donc le module de notre nombre complexe $a+b$, qui a pour argument $\frac{5\pi}{12}$. Pour les plus motivés, on peut même calculer la valeur

exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide de formules de trigonométrie, mais on réservera ce genre de calculs pour le chapitre qu'on ne tardera pas à consacrer entièrement à la trigonométrie.
Même principe pour calculer $a-b = e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}) = e^{i\frac{5\pi}{12}} \times 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Il reste cette fois-ci à se débarasser du facteur $i$ en l'écrivant sous la forme $e^{i\frac{\pi}{2}}$ pour l'intégrer à l'exponentielle : $a-b = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}}$, ce qui donne la formule exponentielle souhaitée.

2. On considère les trois points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$ dans un repère orthonormé direct. On suppose que ces trois points ne sont pas alignés. On note $P$ (et $p$ l'affixe correspondante) le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui tranforme $B$ et $A$, et $Q$ (affixe $q$) le centre de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme $C$ en $A$. Enfin, on note $D$ (affixe $d$) le milieu de $[BC]$.
   (a) Si $A$ est l'image de $B$ par un quart de tour centré en $P$, alors $b-p = i(a-p)$ (si ça ne vous semble pas clair, réflehissez à l'effet que peut avoir une multiplication par $i$ sur un nombre complexe). On en déduit que $b - ia = p(1-i)$, ou encore, en multipliant tout par $1+i$, $2p = (1+i)(b-ia) = b - ia + ib + a$, ce qui est bien la première formule demandée. La deuxième s'obtient quasiment de la même façon, en faisant simplement attention au changement de signe de l'angle de la rotation : $a - q = -i(c-q)$, donc $a + ic = q(1+i)$. On multiplie cette fois par $1-i$ : $2q = (a+ic)(1-i) = a + c + ic - ia$.
   (b) Puisque $D$ est le milieu de $[BC]$, on a $d = \frac{b+c}{2}$ puis, quitte à tout multiplier par 2 en haut et en bas, $\frac{p-d}{q-d} = \frac{2p-b-c}{2q-b-c}$. On exploite les résultats de la question précédente pour obtenir $\frac{p-d}{q-d} = \frac{a-c+(a-b)i}{a-b+(c-a)i} = \frac{i(a-b)+i^2(c-a)}{a-b+i(c-a)} = i$.
   (c) Le calcul précédent nous donne deux informations de nature géométrique : d'une part, $\left|\frac{p-d}{q-d}\right| = |i| = 1$. Or, un module de quotient est égal au quotient des modules, et surtout on peut interpréter les modules de différences comme des distances : $|p-d| = PD$ et $|q-d| = QD$. Le quotient ayant pour module 1, on en déduit que $PD = QD$, c'est-à-dire que le triangle $PDQ$ est isocèle en $D$. D'autre part, le quotient $\frac{p-d}{q-d}$ a également pour argument $\frac{\pi}{2}$, ce qui se traduit exactement par le fait que l'angle $\widehat{PDQ}$ est un angle droit. Le triangle $PDQ$ est donc isocèle rectangle en $D$.

3. (a) Si $E$ est symétrique de $B$ par rapport à $P$, en gardant les mêmes notations pour les affixes que pour les points précédents, on a $e-p = p-b$, ou encore $e = 2p-b$. De même, $f = 2q-c$. Enfin, $K$ en tant que milieu de $[EF]$ vérifie $k = \frac{e+f}{2} = p+q-\frac{b+c}{2}$. On reprend les résultats précédents pour exprimer $p$ et $q$ en fonction de $a$, $b$ et $c$ : $k = \frac{a+b}{2} + i\frac{a-b}{2} + \frac{a+c}{2} + i\frac{c-a}{2} - \frac{b+c}{2} = a + i\frac{c-b}{2}$. C'est exactement ce qu'on devait obtenir.
   (b) Vous n'avez a priori pas vu les outils pour traiter facilement ce genre de question. Il suffit en fait de calculer, de manière très similaire à ce qu'on a fait précédemment, $\frac{p-k}{q-k} = \frac{a+b+i(a-b)-2a-(c-b)i}{a+c+(c-a)i-2a-(c-b)i} = \frac{b-a+i(a-c)}{c-a+i(b-a)} = -i$. On en déduit, exactement comme on a fait plus haut, que le triangle $PKQ$ est lui aussi isocèle rectangle en $K$. Les quatre point appartiennent alors de façon évidente au cercle de diamètre $[PQ]$. En fait, on peut même en déduire que $PKQD$ est un carré.

# Exercice 3

1. (a) Une question facile pour commencer : $47 \times 11 - 43 \times 12 = 517 - 516 = 1$.
   (b) C'est un résultat classique pour ce genre d'équations : les solutions seront tous les couples de la forme $(11 + 43k, 12 + 47k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En effet, si $(p, q)$ est solution de l'équation, en lui soustrayant le cas particulier qu'on vient d'obtenir, on a $47(p-11) - 43(q-12) = 0$. On a donc $47(p-11)$ qui est divisible par 43, et comme 43 et 47 sont des entiers premiers entre

eux (on vient d'obtenir une identité de Bezout pour ces deux entiers), le théorème de Gauss permet d'affirmer que 43 divise $p-11$, donc que $p$ est de la forme $43k$. En reportant dans notre équation, on en déduit directement que $q = 12 + 47k$. Réciproquement, de tels couples sont solution : $47(11+43k) - 43(12+47k) = 47 \times 11 - 43 \times 12 = 1$.

2. (a) Si $x$ et 43 ne sont pas premiers entre eux, alors $x$ est un multiple de 43, qui est un nombre premier. Mais dans ce cas, $x^{41}$ est aussi mutliple de 43, ce qui contredit évidemment grossièrement le fait que $x$ soit solution de l'équation. Le fait que $x^{42} \equiv 1[43]$ est alors donné par le petit théorème de Fermat (normalement à votre programme de maths expertes de Terminale).

   (b) Puisque $x^{41} \equiv 4[43]$, on a $x^{42} \equiv 4x[43]$ donc (en exploitant la fin de la question précédente) $4x \equiv 1[43]$. Or $4 \times 11 \equiv 1[43]$, donc $4(x-11)$ est un multiple de 43. Comme 43 et 4 sont premiers entre eux, $x - 11$ est nécessairement multiple de 43.

   (c) On a prouvé que ces solutions sont nécessairement congrues à 11 modulo 43, reste à prouver la réciproque. Si $x \equiv 11[43]$, alors $x^{42} \equiv 11^{42}[43] \equiv 1[43]$ (toujours le petit theorème de Fermat). En notant $a = 11^{41}$, on a donc $11a \equiv 1[43] \equiv 11 \times 4[43]$, ce qui prouve que $11(a-4)$ est un multiple de 43, et $a - 4$ également (puisque, bien entendu, 11 et 43 sont premiers entre eux). On en déduit que $11^{41} \equiv 4[43]$, et donc $x^{41} \equiv 4[43]$, ce qui prouve que $x$ est bien solution de l'équation.

3. (a) On a déjà prouvé précédemment que la première équation est vérifiée par $x$. La deuxième est une conséquence directe du petit théorème de Fermat : $x^{46} \equiv 1[47]$, donc $x^{47} \equiv x[47]$.

   (b) On remarque bien entendu que 527 n'a pas été choisi au hasard, puisque $527 = 43 \times 12 + 11 = 47 \times 11 + 10$. Notre dernier système est donc équivalent aux deux équations $x \equiv 527[43]$ et $x \equiv 527[47]$. Le nombre $x - 527$ est donc un mutliple commun à 43 et 47, donc également multiple de leur produit 2 021, puisque ce sont deux nombres premiers. On a donc bien $x \equiv 527[2\ 021]$.

   (c) La réciproque étant immédiate, les solutions sont tous les entiers $x$ de la forme $527 + 2\ 021k$.