TD n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

5 septembre 2023

Pour s'échauffer tranquillement pour ce premier TD de l'année, quoi de mieux qu'un petit sujet de bac ? Oui, ce qui suit est bel et bien un sujet de bac récent, mais posé au Maroc (en 2021), et comme vous pourrez le constater, leurs épreuves ne sont pas vraiment comparables à celles qu'on pose aujourd'hui en France (mais les programmes non plus ne sont pas les mêmes).

Exercice 1 (12 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x} + nx$.
On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.

Partie I

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x) - nx + 2)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   (b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet en $-\infty$ une asymptote D_n dont on précisera une équation.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, $f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$.
   (b) Montrer que $\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leqslant 1$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n (on distinguera deux cas : $n = 0$ et $n \geqslant 1$).
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_n$ en son point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que le point en question est le seul point d'inflexion de $\mathcal{C}_n$.
4. Représenter graphiquement dans le même repère les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_2$.
5. Pour tout réel $t > 0$, on note $A(t)$ l'aire délimitée par $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$.
   (a) Calculer $A(t)$ pour tout réel $t > 0$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

Partie II

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_0(u_n)$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution réelle, qu'on notera désormais α.
   (b) Montrer que $|f_0'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout réel x.
2. On **admet** que l'inégalité précédente implique celle-ci : $|f(z) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|z - y|$ pour tous réels y et z.
   (a) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   (b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|\alpha|$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie III

On suppose dans toute cette partie que $n \geqslant 2$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera désormais x_n.
   (b) Montrer que $0 < x_n < 1$. On précise que $\dfrac{2e}{1+e} < 1.47$.
2. (a) Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
   (b) En déduire que la suite (x_n) est strictement décroissante.
   (c) Montrer que la suite (x_n) converge.
3. (a) Montrer que $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2e}{1+e}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.
4. (a) Montrer que $x_n \leqslant x_2$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

Exercice 2

Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a + b \neq c$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (a+b+c) + c(a+b) = 0$.
   (b) On suppose (uniquement dans cette question) que $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$. Écrire les deux solutions de l'équation précédente sous forme exponentielle.
2. On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c dans un repère orthonormé direct. On suppose que ces trois points ne sont pas alignés. On note P (et p l'affixe correspondante) le centre de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui tranforme B et A, et Q (affixe q) le centre de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme C en A. Enfin, on note D (affixe d) le milieu de $[BC]$.
   (a) Montrer que $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$.
   (b) Calculer $\dfrac{p-d}{q-d}$.
   (c) En déduire la nature du triangle PDQ.
3. Soient E le symétrique de B par rapport à P, F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu de $[EF]$.
   (a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \dfrac{i}{2}(c-b)$.
   (b) Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 3

1. On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $47x - 43y = 1$.
   (a) Montrer que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de cette équation.
   (b) Résoudre complètement l'équation.
2. On considère désormais l'équation $x^{41} \equiv 4[43]$ (l'inconnue est toujours dans $\mathbb{Z}$).
   (a) Si x est solution, montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire $x^{42} \equiv 1[43]$.
   (b) Montrer que $4x \equiv 1[43]$, en déduire que $x \equiv 11[43]$.
   (c) Donner toutes les solutions de l'équation.
3. On considère enfin le système de deux équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x^{41} & \equiv & 4[43] \\ x^{47} & \equiv & 10[47] \end{array}\right.$.
   (a) Montrer que, si $x \in \mathbb{Z}$ est solution de ce système, alors $x \equiv 11[43]$ et $x \equiv 10[47]$.
   (b) En déduire que $x \equiv 527[2021]$ (on pourra utiliser la question 1).
   (c) Donner l'ensemble des solutions du système.