# Interrogation Écrite n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

19 mars 2024

1. On pose simplement $u = \mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, qui tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, et on compose : $e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+\dfrac{u^4}{24}+o(u^4)$, donc $e^{\mathrm{sh}(x)} = 1+x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4) = 1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^4)$.
2. C'est un simple produit ici : $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)(1+x+x^2+x^3) + o(x^3) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + x^3 + o(x^3) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.
3. À peu près zéro calcul ici, il suffit de penser à écrire le DL du cosinus à l'ordre 6 en anticipant la division par $x$ : $\dfrac{1-\cos(x)}{x} = \dfrac{1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)}{x} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{24}x^3 + \dfrac{1}{720}x^5 + o(x^5)$.
4. On commence bien sûr par écrire l'expression sous forme exponentielle : $(1+x)^{(x^2)} = e^{x^2\ln(1+x)}$. On pose ensuite $u = x^2\ln(1+x) = x^2\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^5 + o(x^5)$. On compose ensuite le DL par l'exponentielle, et comme $u \sim x^3$, on aura $u^2 \sim x^6$, donc on peut se contenter d'un DL à l'ordre 1 pour cette deuxième étape : $e^u = 1 + u + o(x^5) = 1 + x^3 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^5 + o(x^5)$.
5. On a bien sûr envie de composer les DL, mais $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ n'a pas vraiment une limite nulle quand $x$ tend vers 0. On va donc devoir utiliser une formule d'addition dans notre sinus, et poser $u = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ (qui lui tend bien vers 0) : $\sin(\sqrt{1+u}) = \sin(1)\cos(u) + \cos(1)\sin(u) = \sin(1)\left(1 - \dfrac{1}{2}u^2 + o(x^3)\right) + \cos(1)\left(u - \dfrac{1}{6}u^3 + o(x^3)\right) = \sin(1)\left(1 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3\right) + \cos(1)\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{1}{48}x^3\right) + o(x^3) = \sin(1) - \dfrac{\sin(1)}{8}x^2 + \dfrac{\sin(1)}{16}x^3 + \dfrac{\cos(1)}{2}x - \dfrac{\cos(1)}{8}x^2 + \dfrac{\cos(1)}{24}x^3 + o(x^3) = \sin(1) + \dfrac{\cos(1)}{2}x - \dfrac{\sin(1)+\cos(1)}{8}x^2 + \dfrac{3\sin(1)+2\cos(1)}{48}x^3 + o(x^3)$.
6. On commence par écrire $e^x + \cos(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3) = 2 + x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 2\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)$. On pose par la suite $u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$, et on compose : $\sqrt{e^x + \cos(x)} = \sqrt{2(1+u)} = \sqrt{u}\left(1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \dfrac{1}{16}u^3 + o(u^3)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{24}x^3 - \dfrac{1}{32}x^2 + \dfrac{1}{128}x^3 + o(x^3)\right) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{\sqrt{2}}{32}x^2 + \dfrac{19\sqrt{2}}{384}x^3 + o(x^3)$.