Interrogation Écrite n$^{\mathrm{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

25 janvier 2024

Énoncé modifié :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
   (b) En déduire que A est inversible, et donner explicitement la valeur de A^{-1} (sans faire de pivot de Gauss).

2. On note désormais $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1-4n & 4n \\ -4n & 1+4n \end{pmatrix}$.
   (b) La formule précédente reste-t-elle valable pour $n = -1$?

3. On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.
   (a) Que vaut le produit JMJ (à exprimer en fonction des coefficients de la matrice M) ?
   (b) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice J.
   (c) On souhaite résoudre l'équation $M^2+M = J$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que, si M est solution de cette équation, alors M commute avec J.
   (d) Déduire des deux dernières questions les solutions de l'équation $M^2 + M = J$.

4. Calculer l'inverse de la matrice complexe $M = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & 1+i & 2+i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}$ (mêmes méthodes disponibles que pour une matrice à coefficients réels).