Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 10 : devoir bilan

MPSI Lycée Camille Jullian

8 juin 2024

Exercice 1

Dans tout l'exercice, N est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2, et p un réel vérifiant $p \in]0, 1[$. Une particule se déplace sur une droite graduée en effectuant à chaque seconde un déplacement d'une unité vers la droite avec probabilité p, ou un déplacement d'une unité vers la gauche avec probabilité $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants. À l'instant $t = 0$ (avant le premier déplacement), la particule est située en position n_0 sur la droite, avec $n_0 \in [0, N]$.

1. On note X_n le nombre de déplacements vers la droite effectués par la particule lors des n premières secondes. Donner la loi de la variable aléatoire X_n, ainsi que son espérance et sa variance. En déduire la position moyenne atteinte par la particule après n secondes.
2. On suppose uniquement pour cette question que $N = 4$, $n_0 = 0$ et $p = \dfrac{2}{3}$. Quelle est la probabilité que la particule se retrouve à nouveau à la position 0 après 4 déplacements ? Quelle est la probabilité, **sachant** qu'elle s'est retrouvée à la position 0 après quatre déplacements, qu'elle soit passée par la position -1 au moins une fois lors de ces quatre premiers déplacements ?
3. On suppose pour toute la fin de l'exercice que la particule arrête de se déplacer dès qu'elle atteint la position 0 ou la position N. Pour tout entier $k \in \{0, \dots, N\}$, on note a_k la probabilité qu'elle finisse par s'arrêter en position 0 en partant de la position $n_0 = k$.
   (a) Justifier rapidement que $a_0 = 1$ et $a_N = 0$.
   (b) Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant N - 1$, alors $a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1}$.
   (c) Donner une expression explicite de a_k en fonction de k et de N lorsque $p = \dfrac{1}{2}$. Donner explicitement la liste des probabilités a_k pour $p = \dfrac{1}{2}$ et $N = 4$ et commenter les résultats obtenus.
   (d) Donner une expression explicite de a_k en fonction de k, de N et de p (on peut aussi utiliser la variable $q = 1 - p$ si on l'estime utile) lorsque $p \neq \dfrac{1}{2}$.
   (e) Déterminer de même la probabilité b_k que la particule s'arrête en position N en partant de la position k.
   (f) Calculer $a_k + b_k$, que peut-on en déduire ?

Exercice 2

A. Étude d'un endomorphisme.

On étudie dans cette partie l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, défini par $f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$.

1. Démontrer rigoureusement que f est bien un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice A de l'application f dans la base canonique de E.

3. Calculer le déterminant de la matrice A. Que peut-on en déduire pour f ?
4. Montrer que l'équation $P + P' = X^2P' - 2XP$ admet une seule solution dans E.
5. On pose pour cette question $g = f - id$.
   (a) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme g.
   (b) Montrer que $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.
   (c) L'endomorphisme g est-il un projecteur ?

B. Diagonalisation de f par une méthode originale.

La fin de cette deuxième partie est tout à fait faisable sans avoir réussi les trois premières questions, en reprenant les valeurs propres gentiment fournies par l'énoncé.

1. Soit λ une valeur propre de l'application f, et P un vecteur propre associé à λ. Rappeler la définition des termes « valeur propre » et « vecteur propre » et vérifier que P est solution de l'équation différentielle (E_λ) : $(x^2 - 1)y' - (2x + 1 - \lambda)y = 0$.
2. Résoudre l'équation (E_λ) sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
3. Montrer que les seules valeurs propres de f sont les réels -1, 1 et 3.
4. Déterminer les noyaux $\ker(f + id)$ et $\ker(f - 3\,id)$.
5. Vérifier que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en sélectionnant un polynôme non nul dans chacun des trois noyaux $\ker(f - id)$, $\ker(f + id)$ et $\ker(f - 3\,id)$ est une base de E.
6. Donner la matrice de passage Q de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et calculer son inverse Q^{-1}.
7. Préciser (sans calculs) ce que vaut la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$, et la formule qui la relie aux matrices A et Q.
8. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$. En déduire l'expression explicite de A^n.

Exercice 3

L'objectif de ce problème est d'étudier les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 1$. Les trois parties sont largement indépendantes, et la dernière question de la première partie est un résultat technique qui sera indispensable pour une question ultérieure.

I. Généralités.

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E). Si on applique la méthode de variation de la constante pour chercher une solution particulière de l'équation (E), quel problème rencontre-t-on ?
2. On pose dans toute la suite du problème $g(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$. Justifier rigoureusement que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que g est solution de (E).
3. Quelle est la parité de la fonction g ?
4. Exprimer toutes les solutions de l'équation (E) en faisant intervenir la fonction g dans l'expression proposée.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction g. En déduire une allure possible de la courbe représentative de g au voisinage de 0.
6. Soit h une fonction définie, continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant de plus $h(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Montrer que h admet un maximum sur $[0, +\infty[$.

II. Développement limité des solutions de (E).

Dans toute cette partie, f désigne une solution de l'équation (E).

1. Montrer rigoureusement que f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Que vaut $f'(0)$?
3. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre n en 0, de la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Rappeler l'expression de a_k en fonction de $f^{(k)}(0)$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + 2(n+1)f^{(n)}(x) = 0$. En déduire une relation de récurrence sur les coefficients a_k.
5. À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$. On démontrerait de même (ce qu'il n'est pas demandé de faire) que $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p)!} f(0)$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$. On précisera l'équation de la tangente à la courbe de cette solution en 0, ainsi que la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de 0.

III. Étude de la fonction g.

On reprend ici l'étude de la fonction g définie en question $I.2$.

1. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $xe^{-x^2} \leqslant g(x) \leqslant x$.
2. Soit $x > 1$, montrer que $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$ (on pourra effectuer une IPP en écrivant e^{t^2} sous la forme $\dfrac{1}{t} \times te^{t^2}$).
3. Par le même type de calcul, montrer que $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt.$
4. On pose pour cette question $h(t) = \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$.
   (a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
   (b) En déduire que, si $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$, puis que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)$.
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $g(x)$ en $+\infty$.
5. Montrer que g admet un unique maximum atteint en un point $b \in]0, +\infty[$, et que $g(b) = \dfrac{1}{2b}$.
6. Tracer une allure crédible de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$ (on pourra prendre $b \simeq 1$ pour le tracé).