Devoir Surveillé n^o 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mai 2024

Exercice 1

1. Le dégré de la fraction est égal à $2-4=-2$. Elle admet pour pôles les racines du dénominateur $X^4+2X^3+X^2 = X^2(X^2+2X+1) = X^2(X+1)^2$, donc les pôles sont 0 et -1, avec multiplicité 2 chacun (aucun des deux n'est racine du numérateur). Les racines de la fraction sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, les racines du numérateur.

2. Pas de partie entière à calculer pour une fraction de degré strictement négatif, la décomposition sera de la forme $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2}$. On peut par exemple utiliser la méthode du cours pour les pôles doubles : on pose d'abord $G = X^2F = \dfrac{X^2-2}{(X+1)^2}$, et on calcule $G' = \dfrac{2X(X+1)^2 - 2(X+1)(X^2-2)}{(X^2+1)^4} = \dfrac{2X^2+2X-2X^2+4}{(X^2+1)^3} = \dfrac{2X+4}{(X^2+1)^3}$. On en déduit directement $a = G'(0) = 4$ et $b = G(0) = -2$. On procède de même pour l'autre pôle, en posant cette fois $H = (X+1)^2F = \dfrac{X^2-2}{X^2} = 1 - \dfrac{2}{X^2}$. Le calcul est encore plus rapide : $H' = \dfrac{4}{X^3}$, donc $c = H'(-1) = -4$ et $d = H(-1) = -1$. Il est temps de conclure : $F = \dfrac{4}{X} - \dfrac{2}{X^2} - \dfrac{4}{X+1} - \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

3. En exploitant le calcul précédent, $I = \int_1^2 \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx = \Big[4\ln(x) + \dfrac{2}{x} - 4\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}\Big]_1^2 = 4\ln(2) + 1 - 4\ln(3) + \dfrac{1}{3} - 2 + 4\ln(2) - \dfrac{1}{2} = 8\ln(2) - 4\ln(3) - \dfrac{7}{6}$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-2}{k^4+2k^3+k^2}$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   (a) Calculons donc : $S_1 = \dfrac{1-2}{1+2+1} = -\dfrac{1}{4}$, puis $S_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{4-2}{16+16+4} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{18} = -\dfrac{7}{36}$, et enfin $S_3 = -\dfrac{7}{36} + \dfrac{7}{81+54+9} = -\dfrac{7}{36} + \dfrac{7}{144} = -\dfrac{21}{144} = -\dfrac{7}{48}$. La suite (S_n) est clairement croissante, mais ça ce n'est pas une surprise, et on pourrait naïvement conjecturer qu'elle va par exemple converger vers 0 (on va voir que ce n'est pas tout à fait le cas).

   (b) À l'aide de la décomposition en éléments simples de la première question, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{4}{k} - 2T_n - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 4 - \frac{4}{n+1} - 2T_n - (T_{n+1} - 1) = 5 - \frac{4}{n+1} - 2T_n - T_{n+1}$.

   (c) Avec la valeur rappelée, on a immédiatement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 5 - \frac{\pi^2}{2}$. Déjà, la limite n'est pas vraiment nulle. Elle est en fait très légèrement positive, car $\pi^2 < 10$, donc $\dfrac{\pi^2}{2} < 5$ (mais ça se joue à bien peu de choses).

Exercice 2

1. On commence facilement : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$. Ensuite, on va faire une IPP pour calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\ dx$, en posant $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{-x}$ et donc $v(x) = -e^{-x}$, pour obtenir $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ dx = -\frac{1}{e} + I_1 = 1 - \frac{2}{e}$. Enfin, nouvelle IPP pour le dernier calcul, en posant cette fois-ci $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = -e^{-x}$, et on obtient donc $I_2 = [-x^2e^{-x}]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 2xe^{-x}\ dx = -\frac{1}{e} + 2I_2 = 2 - \frac{5}{e}$.
2. Sur $[0,1]$, on a, pour tout entier naturel n, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}e^{-x} \leqslant x^n e^{-x}$ (on multiplie par une quantité positive). Il suffit d'intégrer pour en déduire que $I_{n+1} \leqslant I_n$, la suite est donc décroissante. Comme par ailleurs $I_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive), la suite est minorée, donc convergente.
3. La fonction est bien sûr dérivable sur $[0, +\infty[$, et $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$. La fonction est donc croissante sur $[0, n]$ puis décroissante sur $[n, +\infty[$, avec pour maximum $f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. On a bien $f_n(0) = 0$ et, par croissance comparée classique, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Puisqu'on nous le demande, dressons un tableau :

x	0		n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$(\frac{n}{e})^n$	$\searrow$	0

La fonction f_n est donc croissante sur $[0,1]$, et comme $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$, l'inégalité demandée en découle.
4. Il suffit de découper le contenu de l'intégrale et d'utiliser la majoration de la question précédente (le choix de I_{2n} et pas de I_n est évident volontaire) : $x^{2n}e^{-x} = x^n f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{e}x^n$, donc $I_{2n} \leqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \frac{1}{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)e}$. Puisque $I_{2n} \geqslant 0$, le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$. Ce n'est bien sûr pas suffisant : comme $0 \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$ (décroissance de la suite), une deuxième application du théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$. Les deux sous-suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) convergent vers la limite, donc (I_n) tend également vers 0.
5. C'est la même IPP que celle déjà effectuée deux fois en début d'exercice : on part de I_{n+1} et on pose $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = -e^{-x}$. On en déduit que $I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n e^{-x}\ dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. Autrement dit, $(n+1)I_n = \dfrac{1}{e} + I_{n+1}$ a pour limite $\dfrac{1}{e}$ puisque $\lim I_{n+1} = 0$, ce qui suffit à conclure que $I_n \sim \dfrac{1}{(n+1)e} \sim \dfrac{1}{ne}$.
6. On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$, la formule stipule que $I_0 = 1 - \dfrac{1}{e}$, ce qui correspond bien à la valeur calculée plus haut. Supposons la formule vraie au rang n, alors en exploitant la

question précédente, $\dfrac{I_{n+1}}{(n+1)!} = -\dfrac{1}{e(n+1)!} + \dfrac{n+1}{(n+1)!} I_n = \dfrac{I_n}{n!} - \dfrac{1}{e(n+1)!}$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence : $\dfrac{I_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{1}{k!}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$.

7. D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = e - \dfrac{eI_n}{n!}$. Comme $\dfrac{I_n}{n!}$ a une limite nulle, on en déduit la limite bien connue : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e$.

Exercice 3

1. Si on est assez malin pour aller lire la suite de l'énoncé, on se rend rapidement compte que prouver que la famille est génératrice va nous éviter des calculs supplémentaires dans les deux questions d'après. Soit donc un vecteur $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, essayons d'écrire le vecteur e comme combinaison linéaire des vecteurs de notre famille : $e = au + bv + cw$ si (x, y, z) vérifient le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & 2c & = & x \\ 2a & & & + & c & = & y \\ a & - & b & + & c & = & z \end{array} \right.$. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donne le système équivalent $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & 2c & = & x \\ 2a & & & + & c & = & y \\ 2a & & & - & c & = & x+z \end{array} \right.$. En soustrayant les deux dernières équations, on a alors $2c = y - x - z$, soit $c = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z$, et on remonte le système à partir de là : $a = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}c = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{4}z$, et enfin $b = x - a + 2c = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}y - \dfrac{5}{4}z$. Le système ayant toujours une solution (et même une solution unique), notre famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$, et comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'en est donc une base. Cela prouve que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

2. Il suffit de remplacer x, y et z par 1 dans les expressions obtenues à la question précédente : $a = \dfrac{3}{4}$, $b = -\dfrac{3}{4}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $(1, 1, 1) = \left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2} \right)_{(u,v,w)}$.

3. Là encore, les calculs de la première question sont directement réexploitables : $e = e_F + e_G$, avec $e_F = au$ et $e_G = bv + cw$. Par définition, $p(e) = e_G = b(1, 0, -1) + c(-2, 1, 1) = (b - 2c, c, c - b)$, soit en remplaçant b et c par leurs expressions $p(x, y, z) = \left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}y - \dfrac{1}{4}z, -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z, -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{3}{4}z \right)$. Les plus courageux vérifieront sans peine qu'avec l'expression obtenue, $p^2(x, y, z) = p(x, y, z)$, ce qui confirme que p est un projecteur.

4. Attention à ne pas tomber dans le piège idiot tendu par l'énoncé, s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, qui est l'opposé de la symétrie par rapport à G parallèlement à F, donc $s = id - 2p$. Autrement dit, $s(x, y, z) = (x, y, z) - 2p(x, y, z) = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z, x + z, \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \right)$. Là encore, on peut vérifier que cette expression est compatible avec $s^2 = id$.

5. On remplace s par son expression : $f = 3\,id - (id - 2p) = 2\,id + 2p$. Si on est un peu malin, on peut trouver la réciproque de f presque sans faire de calcul : on sait que p est un projecteur, donc $p^2 = p$. On en déduit que $f^2 = 4(id + p)^2 = 4(id + 3p) = 4\,id + 12p = 6f - 8\,id$. On a donc $6f - f^2 = 8\,id$, ou encore $f \circ \left(\dfrac{3}{4}\,id - \dfrac{1}{8}f \right) = id$. L'application f est donc bijective (puisqu'elle admet une réciproque), et $f^{-1} = \dfrac{3}{4}\,id - \dfrac{1}{8}f = \dfrac{3}{4}\,id - \dfrac{1}{4}(id + p) = \dfrac{1}{2}\,id - \dfrac{1}{4}p$.

6. On vient de calculer juste au-dessus $f^2 = 4\,id + 12p$, on calcule de même $f^3 = 8(id+p)^3 = 8(id+3p + 3p^2 + p^3)$. Bien sûr, $p^3 = p^2 = p$, donc $f^3 = 8(id+7p)$. De façon générale, on auta $f^n = 2^n(id+(2^n - 1)p)$. En fait, ça se démontre très directement en appliquant brutalement le binôme de Newton. Si on applique cette formule pour $n = -1$, on trouve $\frac{1}{2}\left(id + \left(\frac{1}{2} - 1\right) p\right) = \frac{1}{2} id - \frac{1}{4} p$. Eh bien, ça tombe bien, c'est l'expression obtenue pour f^{-1} un peu plus haut. La formule reste donc valable.

Exercice 4

1. On sait qu'Aglaé et Bernardo sont sur des sites adjacents à l'instant 0, donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Au premier déplacement, on a une chance sur deux que les deux compères se déplacent dans le même sens et restent sur des sites voisins (S_2 et S_3 s'ils se déplacent tous les deux dans le sens horaire, S_1 et S_5 s'ils se déplacent dans le sens trigonométrique). Ils peuvent également échanger leurs places avec une probabilité $\frac{1}{4}$ (il faut qu'Aglaé se déplace de S_1 vers S_2 et que Bernardo fasse le contraire), restant dans ce cas sur des sites voisins. Enfin, le dernier cas a une probabilité $\frac{1}{4}$ et envoie Aglaé en S_5 et Bernardo en S_3, donc à deux routes de distance. On a donc $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{3}{4}$ et $c_1 = \frac{1}{4}$.
   Dans le cas où l'évènement B_1 est réalisé, on aura comme ci-dessus une probabilité $\frac{3}{4}$ qu'Aglaé et Bernardo restent sur des sites voisins après le deuxième déplacement, et $\frac{1}{4}$ qu'ils se retrouvent à deux routes de distance (peu impore quels sont les sites précis où ils se trouvent). Autrement dit, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{3}{4}$ et $\mathcal{P}_{B_1}(C_2) = \frac{1}{4}$. Si par contre ils étaient à deux routes de distance après le premier déplacement (en S_5 et S_3 en l'occurrence), on a une chance sur deux qu'ils se déplacent dans le même sens et restent à deux routes de distance, une chance sur quatre qu'ils aillent tous les deux en S_4 pour se retrouver au même endroit, et une chance sur quatre qu'ils reviennent à leurs positions initiales en S_1 et S_2, donc sur des sites voisins. Autrement dit, $\mathbb{P}_{C_1}(C_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{C_1}(B_2) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{C_1}(A_2) = \frac{1}{4}$.
   On peut alors appliquer la formule des probabilités totales trois fois (les évènements B_1 et C_1 formant un système complet d'après les calculs précédents) pour obtenir $a_2 = \mathbb{P}_{C_1}(A_2) \times \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; $b_2 = \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(B_2) \times \mathbb{P}(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; et $c_2 = \mathbb{P}_{B_1}(C_2) \times \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(C_2) \times \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.
2. Les raisonnement montrent qu'ils ne peuvent se retrouver à l'instant 3 que s'ils étaient à deux routes de distances à l'instant 2, ce qui se produit avec probabilité $c_2 = \frac{5}{16}$, et qu'ils partent tous les deux « dans le bon sens », avec probabilité $\frac{1}{4}$. La probabilité qu'ils se retrouvent **exactement** à l'instant 3 est donc de $\frac{5}{64}$. Il faut lui ajouter la probabilité $a_2 = \frac{1}{16}$ déjà calculée (ils ne peuvent pas se retrouver avant l'instant 2) pour un total de $\frac{9}{64}$ (pas terrible pour l'instant).
3. L'évènement $A_3 \cap B_1$ est réalisé seulement si B_1 est réalisé (évidemment), C_2 également, puis A_3, ce qui se produit avec probabilité $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$. On vient de calculer par ailleurs $\mathbb{P}(A_3) = \frac{9}{64}$, donc $\mathbb{P}_{A_3}(B_1) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap B_1)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1}{3}$. Un résultat peu évident à interpréter. Ça tombe bien, on ne nous le demande pas !

4. Il est complètement évident que les trois évènements sont incompatibles deux à deux (on ne peut pas être à la fois au même endroit à sur des sites voisins, par exemple !). De plus, Aglaé et Bernardo ne peuvent pas être à plus de deux routes l'un de l'autre puisqu'il y a une distance totale de 5 routes pour faire le tour du complexe : s'ils sont à trois routes de distance dans un sens, ils n'ont qu'à tourner dans l'autre sens pour être à distance 2. L'union des trois évènements est donc bien égale à l'univers Ω tout entier.
5. Ce sont en fait des raisonnements déjà faits plus haut : si Aglaé et Bernardo sont à deux routes de distance, ils sont le rester s'ils se déplacent dans le même sens (probabilité $\frac{1}{2}$), se rejoindre s'ils vont tous les deux vers le site qui les sépare (probabilité $\frac{1}{4}$) et arriver sur des sites voisins s'ils partent tous les deux « dans le mauvais sens » (probabilité $\frac{1}{4}$), ce qui donne bien $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$, mais aussi $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
6. Là encore les raisonnements ont déjà été faits, ou bien il n'y a pas de raisonnement à faire (si A_n est vérifié) : $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$, $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$, $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ et $\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
7. C'est une application directe de la formule des probabilités totales, identique à celle décrite pour le calcul de a_2, b_2 et c_2 à la première question.
8. On peut écrire $b_{n+2} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{4}c_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{16}b_n + \dfrac{1}{8}c_n$, mais il faut réussir à se débarasser de c_n. Or, en reprenant la deuxième relation du système précédent, $4b_{n+1} = 3b_n + c_n$, donc $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$, puis $b_{n+2} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{16}b_n + \dfrac{1}{2}b_{n+1} - \dfrac{3}{8}b_n = \dfrac{5}{4}b_{n+1} - \dfrac{5}{16}b_n$. On obtient bien une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
9. L'équation caractéristique de la relation précédente est $x^2 - \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{16} = 0$, elle a pour discriminant $\dfrac{25}{16} - \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{16}$, et admet pour racines $\alpha = \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$, et $\beta = \dfrac{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$. Incroyable, ce sont les deux valeurs fournies par l'énoncé ! On en déduit qu'il existe deux réels A et B tels que, pour tout entier naturel n, $b_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Les valeurs calculées plus haut pour $n = 0$ et $n = 1$ donnent les équations $b_0 = 1 = A + B$ et $b_1 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}A + \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}B$. Autrement dit, $B = 1 - A$, puis $\dfrac{3}{4} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}A$, soit $\dfrac{\sqrt{5}}{4}A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$, donc $A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$, puis $B = 1 - A = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. On peut conclure : $b_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n = \dfrac{4}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$.
10. On a déjà utilisé plus haut le fait que $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$. On remplace : $c_n = \dfrac{4}{5}(4\alpha^{n+2} + 4\beta^{n+2} - 3\alpha^{n+1} - 3\beta^{n+1}) = \dfrac{4}{5}((4\alpha - 3)\alpha \times \alpha^n + (4\beta - 3)\beta \times \beta^n)$. Or, $4\alpha(\alpha - 3) = \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} - 3\right) \times \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-4\sqrt{5}}{16} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{5}$, et de même $4\beta(\beta - 3) = \dfrac{1}{4}\sqrt{5}$. Finalement, $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
11. On a bien sûr $a_n + b_n + c_n = 1$, donc $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \alpha^n\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{4}{5}\alpha\right) - \beta^n\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{4}{5}\beta\right) = 1 - \alpha^n\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right) - \beta^n\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$, soit finalement $a_n = 1 - \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\alpha^n - \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\beta^n$.

12. Les raisons α et β appartenant toutes les deux à l'intervalle $]-1,1[$, on aura $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim_{n\to+\infty} \beta^n = 0$, donc $\lim b_n = \lim c_n = 0$ et $\lim a_n = 1$. Nos deux tourtereaux vont donc finir par se retrouver avec probabilité 1, ouf ! Pour les curieux, le calcul d'espérance (absolument pas demandé ici) montre qu'il leur faudra en moyenne 12 déplacements avant de se retrouver (sauf bien entendu s'ils croisent avant la route d'un dangereux psychopathe se baladant par hasard sur le même complexe pentagonal qu'eux, mais l'énoncé ne prévoyait pas cette possibilité).
13. On l'a déjà vu plus haut, pour se retrouver à l'instant n, ils faut qu'ils soient à deux routes de distance à l'instant $n-1$, et qu'ils partent tous les deux du bon côté lors du déplacement suivant, donc la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{4}c_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.